В. В. Козлов, С. Д. Фурта

Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений

Издание второе,
исправленное и дополненное

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2009

УДК 517.928
ББК 22.161.61
К 592

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №09-01-07118.

Козлов В. В., Фурта С. Д.
Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований, 2009. — 312 с.

Книга посвящена проблеме построения некоторых классов решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этой цели разработана процедура построения решений в виде рядов, которые аналогичны рядам, используемым в первом методе Ляпунова. Особое место в книге отведено асимптотическим решениям, стремящимся к положениям равновесия при неограниченном возрастании или убывании независимой переменной. При этом рассматривается так называемый сильно нелинейный случай, когда существование таких решений невозможно вывести, основываясь лишь на анализе системы первого приближения. Книга иллюстрируется большим количеством конкретных примеров, в которых наличие частных решений того или иного класса свидетельствует о некоторых особенностях динамического поведения системы.

Для специалистов в области механики, математики, теоретической физики, занимающихся теорией динамических систем, для студентов и аспирантов университетов и технических вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

Издание первое: М.: Изд-во МГУ, 1996 г.

ISBN 978-5-93972-739-6

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Первое издание нашей книги вышло в 1996 году в издательстве Московского университета. Это было трудное время для научного книгоиздания: упали тиражи и оказалась нарушенной система распространения научной литературы. По этим причинам книга оказалась малодоступной для потенциальных читателей. Поэтому мы решили подготовить второе издание, несколько ее расширив за счет добавления новых результатов. Заодно были устранены некоторые мелкие неточности и опечатки.

В. В. Козлов, С. Д. Фурта

Предисловие к первому изданию

Проблема изучения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности особых точек практически всегда сопутствовала развитию теории устойчивости движения. Недаром основоположник классической теории устойчивости А. М. Ляпунов развил два метода исследования поведения решений систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки [81]. И если так называемый *второй* или *прямой метод Ляпунова* носит преимущественно качественный характер и призван дать ответ на вопрос: «Уйдут ли из некоторой малой окрестности критической точки решения, начинающиеся вблизи этой точки?», то *первый метод Ляпунова* посвящен аналитическому представлению решений в окрестности равновесия. Основной результат Ляпунова, полученный в этом направлении для автономных систем, состоит в следующем: если характеристическое уравнение системы первого приближения имеет s корней с отрицательной вещественной частью, то полная система дифференциальных уравнений имеет s-параметрическое семейство решений, начинающихся в малой окрестности равновесного решения и экспоненциально стремящихся к этому решению [81]. В литературе данное утверждение носит название теоремы Ляпунова об условной асимптотической устойчивости. Но как отмечает сам Ляпунов [81], это утверждение было известно еще ранее Пуанкаре и содержалось фактически в его диссертации [181]. Существует также идейно близкий результат, носящий в литературе название теоремы Адамара – Перрона, хотя утверждения, сформулированные в оригинальных работах [164, 180], достаточно отдаленно напоминают теорему в ее современном виде: если характеристическое уравнение системы первого приближения имеет s корней с отрицательной вещественной частью и p корней с положительной, то в окрестности неподвижной точки существует два инвариантных многообразия размерностей s и p соответственно, первое из которых состоит из решений системы, экспоненциально стремящихся к критической точке при $t \to +\infty$, а второе — из решений, стремящихся к этой критической точке при $t \to -\infty$. Эту теорему, а также ее современное доказательство, можно найти в большинстве монографий по дифференциальным уравнениям и теории бифуркаций [52, 85, 128, 154, 169].

Метод Ляпунова основывается на асимптотическом интегрировании изучаемой системы дифференциальных уравнений в виде некоторых рядов, содержащих кратные комплексные экспоненты, коэффициентами которых являются полиномы от независимой переменной. Этот метод был развит позже в работах [128, 165]. Следует отметить, что если среди собственных чисел системы первого приближения есть комплексные, то построение действительных решений в виде упомянутых рядов является весьма непростой задачей из-за чрезвычайно громоздкого вида этих рядов, приводящего к непомерному объему вычислений. Из классических работ, посвященных асимптотике решений, входящих в особую точку при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ следует упомянуть также классические работы П. Боля [21].

Практически одновременно с зарождением общей теории устойчивости одной из наиболее актуальных ее задач становится проблема обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия. Первые нетривиальные результаты, полученные в этом направлении, принадлежат Ляпунову [177]. Обзор результатов, посвященных обращению теоремы Лагранжа, не входит в задачу данной книги; заинтересованному читателю авторы могли бы порекомендовать ознакомиться с главой 3 монографии [98], а также с обзорными работами [51, 97, 186].

Во многих конкретных задачах основным методом доказательства неустойчивости является метод построения функций Четаева [132], позволяющий дать качественную картину поведения траекторий в целой области фазового пространства, прилегающей к критической точке. Этот метод в некотором смысле «избыточен», поскольку, как было отмечено самим Четаевым, «чтобы обнаружить неустойчивость невозмущенного движения, достаточно заметить всего одну траекторию, выходящую за заданную область при сколь угодно малых численных значениях возмущений» [132]. Давно было подмечено, что в большинстве случаев явление неустойчивости критической точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений сопровождается существованием частного решения системы, стремящегося к этой точке при $t \to -\infty$. Однако наиболее общие условия для функции Четаева, при которых асимптотическое решение действительно существует, были найдены намного позже Н. Н. Красовским [73]. В задачах, связанных с проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости, это явление было подмечено довольно давно. Стоит подчеркнуть, что обратимость уравнений движения консервативной механической системы гарантирует одновременно существование и «входящего» решения, т. е. стремящегося к положению равновесия при $t \to +\infty$. Одна из первых работ, где это явление описывалось, принадлежит Кнезеру [174]. Она позднее была существенно обобщена Болем [147]. В работе первого из авторов [55] были предъявлены требования к функциям Четаева специального вида, используемым при доказательстве неустойчивости положений равновесия обратимых консервативных систем, обеспечивающие существование «выходящего» решения.

Практически все упомянутые выше результаты касались случая, когда наличие асимптотических решений, стремящихся к критической точке при неограниченном возрастании или убывании независимой переменной, удается обнаружить, основываясь лишь на анализе линеаризованных уравнений, и стремление решений к критической точке носит экспоненциальный характер. Обнаружение же решений, стремление которых к критической точке неэкспоненциально, а также построение асимптотик для таких решений представляется более трудной задачей. Тем более парадоксально, что одна из первых работ, посвященная «неэкспоненциальной» проблеме, была опубликована задолго до выхода в свет ляпуновской **«Общей задачи об устойчивости движения»**. Речь идет о работе Брио и Буке [151]. Основываясь на методике Брио и Буке, Г. В. Каменков [49] разработал метод построения инвариантных кривых, вдоль которых происходит уход от критической точки решения неэкспоненциального типа. Эта методика на долгие годы стала для механиков надежным инструментом для доказательства неустойчивости в так называемых критических случаях, когда неустойчивость невозможно установить, основываясь лишь на линеаризованных уравнениях (см., например, монографию В. Г. Веретенникова [31]). Указанная работа Каменкова осталась практически вне зоны внимания математиков. Одна из причин состоит в том, что, пожалуй, единственным доступным изданием, где содержится формулировка и доказательство теоремы Каменкова, является цитированное выше посмертное издание его трудов [49]. Хотя формулировка этой теоремы абсолютно верна, в приведенном доказательстве объявляются очевидными некоторые утверждения технического характера, требующие дополнительного анализа. В числе более современных авторов, положивших начало исследованиям асимптотик решений нелинейных систем дифференциальных уравнений в окрестности не элементарной особой точки, следует упомянуть А. А. Шестакова в связи с его работой [133]. Одной из первых работ, в которых обсуждалась возможность построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в степенной форме, была работа Н. В. Бугаева [26]. А. Д. Брюно [25], основываясь на технике многогранников Ньютона, предложил общий алгоритм вычисления ведущих членов разложения решений, обладающих обобщенно-степенной асимптотикой, аналитических систем дифференциальных уравнений в окрестности не элементарной особой точки. Диаграммы и многогранники Ньютона играют важную роль в различных областях математики. В отечественной литературе «началом отсчета» применения этой замечательной техники в современных исследованиях принято считать работу [131].

Вновь возросший к концу 70-х годов интерес к проблеме обращения теоремы Лагранжа об устойчивости дал новый толчок к исследованию асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности не элементарной особой точки. В работе первого из авторов [54], а также написанной им в соавторстве с В. П. Паламодовым работе [65], найдены асимптотические решения соответствующих уравнений движения в виде некоторых рядов относительно величин $t^{-\alpha j}\ln^k t$, которые по форме совпадали с разложениями относительно одной из переменных x_j, предложенными Г. В. Каменковым [49]. Следует отметить, что появление логарифмических членов в асимптотических разложениях решений нелинейных уравнений является ситуацией общего положения (см., например, [145]). При этом обнаружилось, что в целом ряде случаев построенные ряды могут расходиться, даже если правые части исследуемых уравнений голоморфны в окрестности особой точки [53]. Выход из данной ситуации — применение теории А. Н. Кузнецова [75, 76], устанавливающей соответствие между формальными решениями исследуемой нелинейной системы уравнений и некоторыми гладкими частными решениями, имеющими требуемую асимптотику. Применение этой техники позволило второму из авторов дать элементарное и строгое доказательство теоремы Каменкова [110].

Возникает вопрос, всегда ли ведущие члены разложений неэкспоненциальных асимптотических решений имеют степенную форму? Как следует из работы А. П. Маркеева [83], посвященной существованию асимптотических траекторий гамильтоновых систем в критических случаях, ответ на этот вопрос отрицательный: например, при наличии резонансов четного порядка между частотами линеаризованной системы асимптотики входящих в особую точку решений могут иметь гораздо более сложную, нежели степенная, форму. Другие примеры такого типа можно найти в цитированной выше статье Кузнецова [76].

В последние десять-пятнадцать лет проблема существования частных решений систем дифференциальных уравнений с неэкспоненциальной асимптотикой привлекла внимание исследователей-физиков. Дело в том, что структура этих решений тесно связана со *свойством Пенлеве* [1, 36]. Под свойством Пенлеве в обширной литературе, написанной физиками-теоретиками (см., например, обзор [150]), понимают следующее: а) подвижные сингулярности решений в комплексной области могут быть только полюсами, б) формальные разложения этих решений в ряды Лорана содержат $(n-1)$ произвольную постоянную в качестве свободных параметров (здесь n — размерность фазового пространства). Проверка этих свойств носит название Пенлеве-теста или ***ARS***-теста по имени авторов, одними из первых применивших указанный подход к нелинейным задачам математической физики [143]. Практически все системы, удовлетворяющие ***ARS***-тесту, могут быть проинтегрированы в явном виде [143, 150, 158]. Идея о том, что решения интегрируемых систем должны быть однозначными мероморфными функциями времени, восходит к Ковалевской [175]. Кажется правдоподобным предположение, что неинтегрируемые системы не удовлетворяют свойству Пенлеве. Однако строгих результатов о неинтегрируемости, использующих неэкспоненциальные асимптотики, немного. В этой связи стоит упомянуть работу Х. Иошиды [201], где имеется ряд неточностей, на которые указано в работе [163], а также серию недавних статей того же Иошиды [199, 200, 198], основанных на методике С. Л. Зиглина [43], в которых накладываются гораздо более сильные условия на рассматриваемые системы. Было подмечено, что наличие логарифмических членов в асимптотических разложениях решений многих конкретных систем, которые принято считать хаотическими, действительно соответствует очень сложному поведению траекторий, а также приводит к тому, что особенности этих решений образуют в комплексной плоскости причудливые звездообразные структуры наподобие фрактальных [161, 192]. К подобным же эффектам приводит наличие иррациональных и комплексных степеней в асимптотических разложениях решений [153, 152].

Целью нашей монографии является систематическое изложение современного состояния дел в задаче исследования асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности неэлементарных особых точек, указание путей распространения этой теории на другие объекты динамической природы, а также демонстрация широкого спектра приложений в механике и других областях. При этом авторы не претендуют на полный библиографический обзор работ, посвященных указанной проблеме. Многие результаты, изложенные в книге, получены самими авторами, поэтому изложение материала определяется, в основном, точкой зрения и пристрастиями авторов.

Прежде, чем приступать к краткому изложению предлагаемых вниманию читателя результатов, необходимо сделать одно замечание библиографического плана. На первый взгляд может показаться, что задачи построения частных решений дифференциальных уравнений с экспоненциальной и обобщенно-степенной асимптотиками настолько отличаются друг от друга, что при построении последних вряд ли удастся использовать какие-либо идеи, содержащиеся в классическом первом методе Ляпунова. Это непонимание развеивается уже при беглом знакомстве с предметом. В чем же заключается суть первого метода Ляпунова? В своей знаменитой **«Общей**

задаче об устойчивости движения» [81] Ляпунов, рассматривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = Ax + \ldots,$$

где многоточие означает совокупность нелинейных членов, предложил искать их частные решения в виде рядов

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j_1+\ldots+j_p \geqslant 1}^{\infty} \mathbf{x}_{j_1,\ldots,j_p}(t) \exp((j_1\lambda_1 + \ldots + j_p\lambda_p)t), \quad p \leqslant n,$$

где функции $\mathbf{x}_{j_1,\ldots,j_p}(t)$ зависят полиномиально от t и, если мы желаем ограничиться рассмотрением действительных решений, от некоторых тригонометрических функций времени.

При этом предполагалось, что совокупность первых членов этих рядов (когда $j_1 + \ldots + j_p = 1$) является решением линеаризованной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Таким образом, применение первого метода Ляпунова к конкретным задачам предусматривает три этапа:

1) выделение из системы некоторой укороченной (в данном случае линейной) подсистемы;

2) построение частного решения или семейства частных решений данной укороченной системы;

3) достраивание найденного опорного решения (или семейства опорных решений) до решений полной системы при помощи некоторых рядов.

Эта же схема используется и при построении частных решений с обобщенно-степенной асимптотикой. По мере чтения книги станут видны и другие более глубокие аналогии между этими двумя задачами. Наиболее существенные из излагаемых здесь результатов опубликованы в статье [69].

Обратим внимание читателя также на термин *сильно нелинейная система*, используемый в заглавии, который может вызвать ряд вопросов. Если ни одно из собственных чисел линеаризованной в окрестности особой точки нелинейной системы уравнений не лежит на мнимой оси, то эта система топологически сопряжена своей линейной части (теорема Гробмана–Хартмана) [4, 128]. С этой точки зрения сильно нелинейной естественно назвать систему, топологический тип фазового портрета которой в окрестности особой точки не определяется лишь линейными членами. Поэтому к этому классу мы отнесем системы, линейные части которых имеют несколько нулевых или чисто мнимых корней характеристического уравнения.

Книга состоит из четырех глав и двух приложений. Первая глава посвящена теории так называемых *полуквазиоднородных систем*, т. е. таких, которые «почти» инвариантны относительно действия фазового потока некоторой специальной линейной системы уравнений фуксова типа, и построению их решений. Действие этого потока вводит в систему некоторый малый параметр, позволяющий выделить укороченную квазиоднородную подсистему. В § 1 этой главы доказывается основная теорема о том, что частные решения укороченной системы, лежащие на орбитах указанного потока, могут быть достроены при помощи некоторых рядов до решений полной системы. Второй параграф посвящен анализу сходимости этих рядов. Как уже отмечалось, проблема поиска решений систем дифференциальных уравнений с обобщенно-степенной асимптотикой уходит корнями в первый метод Ляпунова. Применению идей этого метода в рассматриваемой задаче посвящен § 3. В частности, при помощи «квазилинейной» техники доказана теорема о существовании многопараметрических семейств решений, имеющих неэкспоненциальную асимптотику, для систем уравнений гораздо более широкого класса, чем рассматриваемые в предыдущих параграфах. Следующий, четвертый параграф содержит большое количество конкретных примеров из математики, механики, физики и других разделов естествознания. С одной стороны, они иллюстрируют доказанные теоретические результаты, а с другой имеют самостоятельное значение. Например, исследован новый критический случай высокой коразмерности n нулевых корней характеристического уравнения с одной группой решений. Другим интересным приложением является методика построения траекторий столкновения в масштабе реального времени в задаче Хилла. В последнем (пятом) параграфе обсуждается теоретико-групповой подход к проблеме построения частных решений систем дифференциальных уравнений. Предложен метод, основанный на использовании произвольной однопараметрической группы преобразований фазового пространства, являющейся в некотором смысле «почти» группой симметрии рассматриваемой системы уравнений.

Вторая глава посвящена нахождению достаточных условий существования решений систем дифференциальных уравнений, стремящихся к особой точке при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, когда система первого приближения нейтральна. В § 1 приводятся достаточные условия существования таких решений автономных систем дифференциальных уравнений, выраженные в терминах свойств квазиоднородных укорочений нормальных форм Пуанкаре. Подробно обсуждаются критические случаи двух чисто мнимых корней для четырехмерных общих систем дифференциальных уравнений. Во втором параграфе полученные в § 1 результаты обобщаются на системы, правые части которых периодически зависят от времени. Аналогичная теория строится для задачи поиска решений, асимптотически стремящихся к инвариантным торам, если эти торы в первом приближении нейтральны. В § 3 обсуждается специфика решения задач, рассматривавшихся в первом параграфе, порождаемая свойством гамильтоновости исследуемых уравнений. Здесь же в качестве иллюстрации показывается, как при помощи изложенных результатов получить известные теоремы о неустойчивости положений равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии резонансов между частотами малых колебаний.

В третьей главе рассматриваются задачи, названные авторами сингулярными. Особенность этих задач состоит в том, что ряды, изображающие решения, имеющие требуемую асимптотику, расходятся даже в том случае, когда исследуемая система аналитична. В первом параграфе, посвященном методике получения достаточных условий неустойчивости в критическом случае наличия нулевых корней характеристического уравнения системы первого приближения, доказывается теорема о существовании формального инвариантного многообразия, касающегося линейного подпространства, отвечающего этим корням. Показано, что заведомая неаналитичность этого многообразия и является причиной расходимости упомянутых рядов. В этом же параграфе приводятся условия существования «гибридных» решений, асимптотические разложения которых содержат как экспоненты, так и обратные степени независимой переменной. Давно подмечено, что асимптотики решений систем дифференциальных уравнений могут содержать степени повторных логарифмов достаточно высоких порядков. Механизм этого явления вскрывается в § 2. Он также связан с некоторым «критическим» случаем, а именно наличием нулей в спектре так называемой *матрицы Ковалевской*. В § 3 излагается иная причина расходимости асимптотических рядов, заключающаяся в том, что при выделении квазиоднородных укорочений даже при помощи стандартной методики многогранников Ньютона могут пропадать некоторые производные. Приводится ряд теорем о существовании асимптотических решений систем, не разрешенных относительно производных. Кратко излагается упомянутая выше теория Кузнецова [75, 76], позволяющая установить соответствие между формальными и фактическими решениями таких систем. В качестве примера с критических позиций обсуждается ряд работ, посвященных поиску новых интегрируемых случаев в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи метода Ковалевской. Показано, что решения, полученные в этих работах, скорее всего не являются *аналитическими*, поскольку для их построения фактически использовалась процедура укорочения системы уравнений Эйлера – Пуассона, приводящая к потере производных.

Материал, излагаемый в главах 2 и 3, и частично в главе 1, является прежде всего сильным средством доказательства неустойчивости особых точек систем дифференциальных уравнений. Поэтому большинство теорем о существовании асимптотических решений сопровождаются теоремами-дублерами, дающими достаточные условия неустойчивости.

Четвертая глава носит иллюстративный характер. В ней рассматривается круг задач, так или иначе связанных с проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия. В § 1 приводятся (в основном без доказательства) достаточные условия устойчивости (в том числе и асимптотической) положений равновесия обобщенно-градиентных систем, обратимых консервативных механических систем, механических систем, на которые действуют гироскопические и диссипативные силы, а также систем, параметры которых меняются со временем. Эти условия выражены в терминах наличия или отсутствия минимума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия. Рассматривается также задача о влиянии наложения некоторых дополнительных связей на устойчивость равновесия. В частности, построен поучительный пример, показывающий, что стабилизируемая в первом приближении путем наложения *неголономной* связи обратимая консервативная система может быть как устойчивой так и неустойчивой в зависимости от арифметических свойств ее частот. Следующие два параграфа посвящены обращению сформулированных в первом параграфе теорем при помощи построения асимптотических решений. Их разделение носит чисто условный характер. Если в § 2 используются утверждения «регулярного» характера, т. е. доказанные в главе 1, и поэтому гарантирующие сходимость построенных рядов в наиболее важных приложениях, то § 3 опирается на «сингулярную» методику, приводящую к построению расходящихся рядов.

Приложение А посвящено распространению разработанных методов на некоторые другие объекты динамического характера. В этом приложении для систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, а также для систем интегро-дифференциальных уравнений определенного вида вводится понятие квазиоднородности и полуквазиоднородности. Указываются достаточные условия существования решений, асимптотически стремящихся к равновесным при неограниченном убывании времени, и на их основе формулируются теоремы о неустойчивости. В качестве примера обсуждается интересный эффект взрывной неустойчивости в экологических системах типа Вольтерра – Лотки при нулевых значениях мальтузианских рождаемостей.

Во втором приложении рассматривается задача о влиянии на интегрируемость систем обыкновенных дифференциальных уравнений наличия и структуры частных решений с обобщенно-степенной асимптотикой. Выше мы уже упоминали работу Х. Иошиды [201], где в качестве критерия интегрируемости использовались арифметические свойства собственных чисел матрицы Ковалевской, вычисление которой невозможно без нахождения главных членов асимптотики частных решений неэкспоненциального типа. В приложении В уточнен критерий Иошиды и этот результат применен к некоторым известным в математической физике системам уравнений.

Книга рассчитана в первую очередь на широкий круг профессиональных ученых и тех, кто готовится стать таковыми: «чистых» математиков и математиков-прикладников, интересующихся проблемами, связанными с обыкновенными дифференциальными уравнениями, механиков-теоретиков, занимающихся вопросами качественного поведения траекторий механических систем. Авторы надеются, что и физики, тяготеющие к теоретическим исследованиям, также найдут для себя в книге много полезного. Чтобы максимально расширить круг читателей, по мере возможности авторы старались строить изложение таким образом, чтобы основное содержание книги было доступно читателю, имеющему в активе лишь стандартный курс высшей математики и теоретической механики факультетов прикладной математики технических вузов. Доказательства теорем о сходимости формальных рядов или асимптотическом поведении решений, содержащие (впрочем отнюдь несложные) элементы функционального анализа, написаны таким образом, что могут быть опущены без ущерба для понимания основного круга идей. Необходимые сведения из теории нормальных форм (без доказательства) включены авторами в текст, чтобы не нарушать стройности изложения. В некоторых местах (а именно в § 5 главы 1, § 3 главы 2 и приложении В) для понимания материала читателю понадобятся некоторые начальные сведения из алгебры (например, понятия групп и алгебр Ли). Тем не менее ряд необходимых утверждений, касающихся групп симметрии систем дифференциальных уравнений, формулируется и доказывается в тексте книги. Некоторые сведения из дифференциальной топологии используются лишь при доказательстве одной технической леммы, и потому также не нарушают концепции простоты изложения.

Настоящая книга является плодом более, чем десятилетней работы авторов: первые публикации на данный предмет относятся к 1982 г. В ней содержатся как опубликованные ранее результаты, так и результаты, выносимые на суд читателя впервые. Часть материала книги основана на специальных курсах «Асимптотические методы в механике», прочитанном первым автором на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и «Методы аналитической и небесной механики в динамике космических объектов», подготовленном вторым автором совместно с П. С. Красильниковым и прочитанном на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института. Значительная часть книги составила также основу мини-курсов лекций, прочитанных вторым автором в Католическом университете города Лува-ла-Нев (Бельгия) в 1994 г. и в университете города Тренто (Италия) в 1995 г.

В процессе работы над книгой авторы имели счастливую возможность обсуждать концепцию первого метода Ляпунова в применении к сильно нелинейным системам со многими учеными. Хотелось бы выразить глубокую благодарность всем, кто принимал участие в этих дискуссиях, а также выслушивал нетрадиционные, а возможно, и спорные взгляды авторов на данный предмет: П. Хагедорну (P. Hagedorn), Высшая техническая школа г. Дармштадт, Германия; Ж. Мавэ (J. Mawhin) и К. Пайфферу (K. Peiffer), Католический университет г. Лува-ла-Нев, Бельгия; Л. Сальвадори (L. Salvadori), университет г. Тренто, Италия; В. В. Румянцеву и С. В. Болотину, Московский государственный университет. Особо хотелось бы поблагодарить профессора Л. Сальвадори, который привлек внимание авторов к неизвестному им до того времени кругу задач, и чье гостеприимство помогло приблизить окончание работы над этой книгой. Нельзя не отметить также самоотверженную работу М. В. Матвеева, кропотливо прочитавшего рукопись и высказавшего несколько замечаний, которые позволили авторам устранить ряд погрешностей.

Москва, июнь 1996 г. *В. В. Козлов, С. Д. Фурта*

Глава 1

Полуквазиоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Формальные асимптотики частных решений полуквазиоднородных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим бесконечно гладкую систему дифференциальных уравнений, для которой начало координат $\mathbf{x} = 0$ является особой точкой:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.1}$$

Пусть матрица $\mathbf{A} = d\mathbf{f}(\mathbf{0})$ — матрица Якоби векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, вычисленная в особой точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Мы будем искать условия на правую часть системы (1.1.1), необходимые для того, чтобы (1.1.1) имела частное решение $\mathbf{x}(t) \to 0$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Такие решения всюду ниже мы будем называть *асимптотическими*.

Сформулируем сначала хорошо известный результат. Рассмотрим оператор $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Разложим пространство $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму трех подпространств

$$\mathbb{R}^n = E^{(s)} \oplus E^{(u)} \oplus E^{(c)}$$

(s — от *stable*, u — от *unstable*, c — от *center*). Это разложение продиктовано следующим требованием: все три подпространства в правой части инвариантны относительно действия оператора $\mathbf{A}$; спектр сужения $\mathbf{A}|_{E^{(s)}}$ лежит в открытой левой полуплоскости, спектр $\mathbf{A}|_{E^{(u)}}$ — в правой, а спектр $\mathbf{A}|_{E^{(c)}}$ — на мнимой оси. Возможность такого представления вытекает из стандартных теорем линейной алгебры (см., например [126]).

Теорема 1.1.1. *Система* (1.1.1) *имеет три гладких инвариантных многообразия $W^{(s)}$, $W^{(u)}$, $W^{(c)}$, проходящих через $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, касающихся в нуле плоскостей $E^{(s)}$, $E^{(u)}$, $E^{(c)}$ соответственно и имеющих те же размерности. Решения с начальными условиями на $W^{(s)}(W^{(u)})$ экспоненциально* *стремятся к* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *при* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$*, поведение же решений на* $W^{(c)}$ *определяется нелинейными членами.*

Многообразие $W^{(s)}$ называется устойчивым, $W^{(u)}$ — неустойчивым, а $W^{(c)}$ — центральным (см. рис. 1).

Данная теорема представляет собой комбинацию из теоремы Адамара–Перрона и теоремы о центральном многообразии [85, 128, 154, 169]. Следует отметить, что центральное многообразие $W^{(c)}$ может иметь, вообще говоря, лишь конечный порядок гладкости [154].

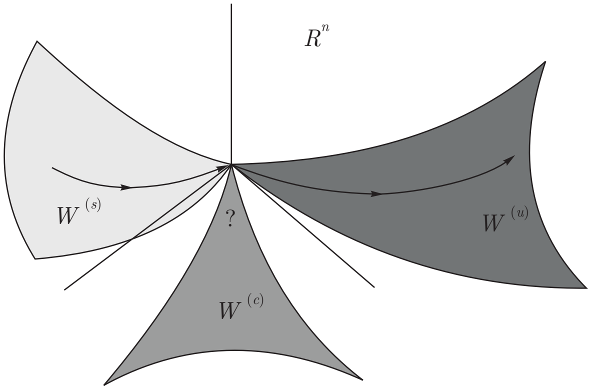

Рис. 1

Таким образом, вопрос о наличии у системы (1.1.1) асимптотических частных решений с экспоненциальной асимптотикой решается при помощи исследования системы первого приближения. Отметим еще один факт, вытекающий из общей идеологии первого метода Ляпунова: если матрица $\mathbf{A}$ имеет хотя бы одно действительное отличное от нуля собственное значение — β, то существует действительное частное решение (1.1.1), принадлежащее $W^{(s)}$ или $W^{(u)}$ в зависимости от знака β и представимое в виде ряда

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(t) e^{-k\beta t}, \tag{1.1.2}$$

где $\mathbf{x}_k(t)$ — некоторые полиномиальные функции времени t, а $\mathbf{x}_0 \equiv \mathrm{const}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ с собственным значением — β. Для комплексных собственных значений соответствующие разложения действительных частных решений выглядят гораздо сложнее.

Для того чтобы найти неэкспоненциальные асимптотические решения, необходимо редуцировать систему на центральное многообразие. Однако в этой главе мы будем предполагать, что имеет место критический случай устойчивости как в будущем, так и в прошлом, т. е. все собственные значения матрицы Якоби $d\mathbf{f}(0)$ имеют чисто мнимые действительные части. В этом параграфе будет даже негласно предполагаться, что оператор $d\mathbf{f}(0)$ нильпотентен. Нашей главной задачей будет нахождение условий, достаточных для того, чтобы система уравнений (1.1.1) имела неэкспоненциальное частное решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

В этом параграфе мы будем решать даже более общую задачу. Рассмотрим неавтономную гладкую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{1.1.3}$$

Пусть векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ таково, что его компоненты $f^1, \ldots, f^n$ могут быть представлены в виде формальных степенных рядов

$$f^i = \sum_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} f^j_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} (x^1)^i_1 \ldots (x^n)^i_n t^{i_{n+1}}, \tag{1.1.4}$$

где показатели $i_1, \ldots, i_n$ — целые неотрицательные, а i_{n+1} — целые числа. Таким образом, мы отказываемся от условия $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}$. Для такого рода систем мы найдем достаточные условия, гарантирующие существование частных решений, компоненты которых имеют обобщенно-степенную асимптотику либо при $t \to \pm 0$, либо при $t \to \pm\infty$. При этом требования гладкости правых частей (1.1.3) лишь на декартовом произведении некоторой малой окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ на множество вида $0 < \underline{t} < |t| < \overline{t} < +\infty$ могут оказаться недостаточными. Поэтому мы будем все время предполагать, что правые части являются бесконечно дифференцируемыми вектор-функциями в той области пространства, где предположительно находятся искомые решения.

Особая точка системы дифференциальных уравнений называется *элементарной* [23], если матрица Якоби правой части этой системы, вычисленная в особой точке, имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение. Приведем несколько определений, используемых в теории устойчивости систем с *неэлементарными* особыми точками [23, 125].

Определение 1.1.1. Пусть $f^j_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} (x^1)^i_1 \ldots (x^n)^i_n t^{i_{n+1}}$ — некоторый нетривиальный моном разложения (1.1.4) j-й компоненты неавтономного векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ геометрическую точку с координатами $(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$. Набор всех таких точек называется j-й *диаграммой Ньютона* $\mathfrak{D}_j$ векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, а ее выпуклая оболочка — j-м *многогранником Ньютона* $\mathfrak{B}_j$ (см. рис. 2).

Определение 1.1.2. Векторное поле $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x},t)$ называется *квазиоднородным* степени $\mathrm{q} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{q} \neq 1$, с показателями $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}$, где числа $\mathrm{q}-1$, $s_1, \ldots, s_n$ не имеют нетривиальных общих делителей, если для любых $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \neq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ выполняются следующие соотношения

$$f^j_{\mathrm{q}}(\lambda^{s_1}x^1, \ldots, \lambda^{s_n}x^n, \lambda^{1-\mathrm{q}}t) = \lambda^{\mathrm{q}+s_j-1} f^j_{\mathrm{q}}(x^1, \ldots, x^n, t).$$

Полезно заметить, что все диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_j$ и многогранники Ньютона $\mathfrak{B}_j$ квазиоднородного векторного поля лежат в гиперплоскостях, задаваемых уравнениями

$$s_1 i_1 + \ldots + s_j(i_j - 1) + \ldots + s_n i_n + (1-\mathrm{q})(i_{n+1} + 1) = 0. \qquad (1.1.5)$$

Требование $\mathrm{q} > 1$, вообще говоря, существенным не является: если рассматривать отдельное квазиоднородное векторное поле, то путем изменения знака величин $s_1, \ldots, s_n$ можно добиться выполнения неравенства $\mathrm{q} > 1$.

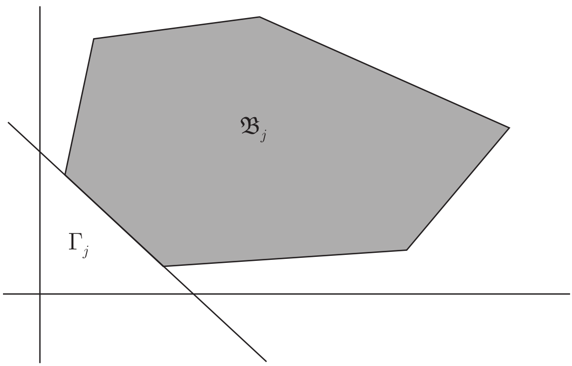

Рис. 2

Определение 1.1.3. Пусть Γ — некоторая r-мерная грань j-го многогранника Ньютона $\mathfrak{B}_j$ $(0 \leqslant r < n+1)$, лежащая в гиперплоскости, задаваемой уравнением (1.5). Грань Γ_j будем называть *положительной*, если любая точка $(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}) \in \mathfrak{B}_j \setminus \Gamma_j$ лежит в положительном полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью (см. рис. 2), т. е. выполняется неравенство

$$s_1 i_1 + \cdots + s_j(i_j - 1) + \cdots + s_n i_n + (1 - \mathrm{q})(i_{n+1} + 1) > 0.$$

Наоборот, если для любой точки из $\mathfrak{B}_j \setminus \Gamma_j$ выполнено противоположное неравенство,

$$s_1 i_1 + \cdots + s_j(i_j - 1) + \cdots + s_n i_n + (1 - \mathrm{q})(i_{n+1} + 1) < 0,$$

грань Γ_j назовем *отрицательной*.

Определение 1.1.4. Векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ назовем *полуквазиоднородным*, если оно может быть представлено в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t),$$

где $\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}, t)$ — некоторое квазиоднородное векторное поле, выделенное либо положительными, либо отрицательными гранями многогранников Ньютона полной системы, а показатели «возмущающего» поля $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$ лежат строго внутри этих многогранников (см. рис. 2). Мы будем говорить также, что рассматриваемое векторное поле *положительно полуквазиоднородно*, если его квазиоднородное укорочение $\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}, t)$ выделено положительными гранями, в противоположном случае назовем рассматриваемое поле *отрицательно полуквазиоднородным*.

В «положительном» случае будем искать асимптотики решений системы (1.1.1) при $t \to \pm\infty$, в «отрицательном» — при $t \to \pm 0$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{S}$ — некоторая диагональная матрица $\mathrm{diag}(s_i, \ldots, s_n)$ с целыми элементами, λ — некоторое действительное число. Через $\lambda^\mathbf{S}$ мы будем обозначать диагональную матрицу $\mathrm{diag}(\lambda^{s_1}, \ldots \lambda^{s_n})$.

Очевидно, что определение (1.1.2) квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}, t)$ можно записать в следующем эквивалентном виде: для любых $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \neq 0$ и любого действительного λ должно выполняться следующее равенство:

$$\mathbf{f}_\mathrm{q}(\lambda^\mathbf{S}\mathbf{x}, \lambda^{1-\mathrm{q}}t) = \lambda^{\mathbf{S}+(\mathrm{q}-1)\mathbf{E}}\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}, t), \tag{1.1.6}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Простейшим примером квазиоднородного векторного поля может служить однородное векторное поле, когда $\mathbf{S} = \mathbf{E}$. Другие примеры квазиоднородных векторных полей мы рассмотрим немного позже.

Из (1.1.6) следует, что квазиоднородная система дифференциальных уравнений, т. е. такая, правая часть которой является квазиоднородным векторным полем, остается инвариантной относительно квазиоднородной группы растяжений

$$t \mapsto \mu^{-1}t, \quad \mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \quad \text{где} \quad \mathbf{G} = \alpha\mathbf{S}, \quad \alpha = \frac{1}{\mathrm{q}-1}. \tag{1.1.7}$$

Также легко заметить, что если система дифференциальных уравнений полуквазиоднородна, т. е. ее правая часть является полуквазиоднородным векторным полем, то под действием группы (1.1.7) она приобретет следующий вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t, \mu), \tag{1.1.8}$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t)$ — квазиоднородное векторное поле, выделенное положительными или отрицательными гранями многогранников Ньютона, а $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t, \mu)$ представляет собой формальный степенной ряд относительно μ^β, $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha = |\beta|$ без свободного члена. Если $\beta > 0$, то $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ положительно полуквазиоднородно, если же $\beta < 0$, то рассматриваемое векторное поле отрицательно полуквазиоднородно.

Положив в (1.1.8) $\mu = 0$ в положительно полуквазиоднородном случае и $\mu = \infty$ в отрицательно полуквазиоднородном случае, получим «*укороченную*» или, как ее еще называют, «*модельную*» систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t). \tag{1.1.9}$$

Заметим, что приведенные выше рассуждения можно принять за определения квазиоднородных и полуквазиоднородных систем. Если не интересоваться численным значением степени квазиоднородности системы, то ее структура вполне определяется матрицей преобразования $\mathbf{G}$.

По сути для того, чтобы знать параметры полуквазиоднородной системы, достаточно определить $\beta \neq 0$ и $\mathbf{G}$. При этом можно даже избежать достаточно обременительного требования $\mathrm{q} \neq 1$. В дальнейшем мы по-прежнему будем обозначать выделенное квазиоднородное укорочение как $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}$, при этом имея в виду не столько степень квазиоднородности q, сколько термин (*quasihomogenity* — квазиоднородность).

Мы приведем сейчас более общие определения квазиоднородных и полуквазиоднородных векторных полей, позволяющие отказаться как от понятия степени квазиоднородности, так и от использования техники, связанной с многогранниками Ньютона.

Рассмотрим некоторую $(n+1)$-мерную *фуксову* систему дифференциальных уравнений вида

$$\mu\frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad \mu\frac{dt}{d\mu} = -t, \tag{1.1.10}$$

где $\mathbf{G}$ — некоторая действительная матрица, поток которой будем обозначать как

$$t \mapsto \mu^{-1}t, \quad \mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}. \tag{1.1.11}$$

Напомним, что правые части линейной системы Фукса имеют особенности в виде простых полюсов по независимой переменной (в данном случае по μ).

Определение 1.1.5. Векторное поле $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x},t)$ назовем квазиоднородным, если соответствующая система дифференциальных уравнений инвариантна относительно действия фазового потока (1.1.11) фуксовой системы (1.1.10).

Это определение эквивалентно определению 1.1.2, если положить

$$\mathbf{G} = \alpha\mathbf{S}, \quad \lambda = \mu^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = 1/(\mathrm{q}-1).$$

Определение полуквазиоднородности может быть переформулировано следующим образом.

Определение 1.1.6. Систему дифференциальных уравнений (1.1.3) назовем *полуквазиоднородной*, если под действием потока (1.1.11) ее правая часть преобразуется к виду (1.1.8), где $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x},t)$ — некоторое квазиоднородное векторное поле в смысле определения 1.1.5, а $\mathbf{f}^*(\mathbf{x},t,\mu)$ представляет собой формальный степенной ряд относительно μ^{β}, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, без свободного члена. Если $\beta > 0$, систему (1.1.3) будем называть *положительно полуквазиоднородной*, и *отрицательно полуквазиоднородной* в случае отрицательности β.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1.1.1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2$$

является квазиоднородной степени $\mathrm{q} = 2$ с показателями $s_x = 2$, $s_y = 3$. С другой стороны, любая система вида

$$\dot{x} = y + f(x,y), \quad \dot{y} = x^2 + g(x,y),$$

где $f(0,0) = g(0,0) = 0$, а f, g не содержат линейных членов и, более того, g не содержит членов, квадратичных по x, является полуквазиоднородной.

Пример 1.1.2. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (x^2+y^2)(ax-by), \quad \dot{y} = (x^2+y^2)(ay+bx)$$

является, само собой разумеется, (квази-)однородной степени $\mathrm{q} = 3$ с показателями $s_x = s_y = 1$. С другой стороны, она остается инвариантной относительно действия фазовых потоков следующего семейства фуксовых систем уравнений

$$\mu\frac{dx}{d\mu} = \frac{1}{2}x + \delta y, \quad \mu\frac{dy}{d\mu} = \frac{1}{2}y - \delta x, \quad \mu\frac{dt}{d\mu} = -t.$$

Поэтому эта система квазиоднородна в смысле определения 1.1.5. Далее, любая система вида

$$\dot{x} = (\rho + f(\rho))(ax - by), \quad \dot{y} = (\rho + f(\rho))(ay + bx),$$

где $\rho = x^2 + y^2$ и $f(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$, является полуквазиоднородной.

Пример 1.1.3. Уравнение Эмдена–Фаулера [13], описывающее процесс расширения политропного газа

$$t\ddot{x} + 2\dot{x} - atx^p = 0, \quad p \geqslant 2,$$

является простейшим примером не автономной квазиоднородной системы.

Это уравнение можно переписать в виде системы двух уравнений

$$\dot{x} = t^{-2}y, \quad \dot{y} = at^2x^p,$$

которая является квазиоднородной степени $\mathrm{q} = p$, с показателями $s_x = 2$, $s_y = 3 - p$.

Необходимость расширения понятий квазиоднородности и полуквазиоднородности продиктовано следующими обстоятельствами. Часто встречаются случаи, когда выделенное при помощи группы квазиоднородных растяжений вдоль каждой из координат укорочение может не иметь решений с желаемыми асимптотическими свойствами. Поэтому для выделения «значимого» укорочения прибегают к процедуре, алгоритм которой достаточно подробно описан в книге А. Д. Брюно [23]. Одним из наиболее важных пунктов в этом алгоритме является применение к системе (1.1.1) «бирационального» преобразования, определенного на некотором примыкающем к особой точке конусе, в результате которого становится возможным выделить из полной системы квазиоднородную подсистему, которая обладала бы теми или иными нужными свойствами. Введенные же определения *a priori* расширяют само понятие укорочения. При анализе систем на плоскости в окрестности не элементарной особой точки также часто прибегают к несколько иной процедуре, именуемой σ-процессом или процедурой разрешения особенностей (см. книгу [4], а также обзор [7]).

Рассмотрим теперь более пристально квазиоднородное укорочение (1.1.9) первоначальной системы дифференциальных уравнений (1.1.3). Благодаря квазиоднородности, в достаточно общей ситуации система (1.1.10) имеет частное решение в виде «квазиоднородного луча»

$$\mathbf{x}^{\gamma}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^{\gamma}, \tag{1.1.12}$$

где $\gamma = \pm 1$, а $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ — ненулевой действительный вектор. Ниже мы уточним понятие «достаточно общей ситуации».

Если (1.1.9) имеет частное решение вида (1.1.12), вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ должен удовлетворять следующей алгебраической системе уравнений:

$$-\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^{\gamma} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^{\gamma}, \gamma). \tag{1.1.13}$$

Вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ мы будем называть *собственным вектором* квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t)$, порожденного квазиоднородной структурой $\mathbf{G}$.

Основной результат этого параграфа заключается в том, что система (1.1.3) имеет частное решение, которое в определенном смысле повторяет асимптотику частного решения (1.1.12) укороченной системы (1.1.9).

Следующее утверждение обобщает теорему из [110].

Теорема 1.1.2. [69] *Предположим, что система* (1.1.3) *полуквазиоднородна. Пусть существует такой вектор* $\mathbf{x}_0^{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0^{\gamma} \neq \mathbf{0}$, *и число* $\gamma = \pm 1$, *что имеет место равенство* (1.1.13)*. Тогда система* (1.1.3) *имеет частное решение с главным членом асимптотики* $(\gamma t)^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^{\gamma}$ *при* $t^{\chi} \to \gamma \times \infty$, *где* $\chi = \operatorname{sign}\beta$ *— «знак полуквазиоднородности».*

Прежде чем доказывать данную теорему, обсудим ее условия. Существование частных асимптотических решений полной системы сводится к поиску собственных векторов укороченной системы. В такой интерпретации условия теоремы напоминают ляпуновские условия существования экспоненциальных решений, получаемые из системы первого приближения. При этом роль линеаризованной системы в нашем случае играет полученное квазиоднородное укорочение. Частное решение (1.1.12) укороченной системы будет соответствовать экспоненциальному частному решению системы первого приближения, существование которого влечет за собой существование частного решения полной системы с экспоненциальной асимптотикой.

В ляпуновском случае нахождение собственных векторов сводится к хорошо известной задаче линейной алгебры. В исследуемом же нелинейном случае поиск таких собственных векторов может оказаться нелегким делом. Тем не менее, их существование в ряде случаев вытекает из достаточно простых геометрических соображений.

Из определения 1.1.5 вытекает тождество

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mu^{-1}t) = \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t). \tag{1.1.14}$$

Остановимся на простом случае, когда укороченная система (1.1.9) автономна: $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — особая точка этого векторного поля и матрица $\mathbf{G}$ невырождена. Вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ будем искать в следующем виде:

$$\mathbf{x}_0^{\gamma} = \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{e}^{\gamma},$$

где μ — положительное число, а $\mathbf{e}^{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}^{\gamma}\| = 1$ — некоторый единичный вектор.

Используя (1.1.14), перепишем уравнение (1.1.13) в виде

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{e}^{\gamma}) = -\gamma\mu^{-1}\mathbf{e}^{\gamma}. \tag{1.1.15}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — особая точка векторного поля $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}$. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}).$$

Следующая лемма является «квазиоднородным вариантом» утверждений из работ [59, 117, 118, 119].

Лемма 1.1.1. [69] *Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — единственная особая точка автономного квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_{\mathrm{q}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *если i — индекс векторного поля $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{x} = 0$ — четно, то $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}$ имеет собственные векторы как с положительными, так и с отрицательными собственными значениями γ,*

2. *если n — размерность фазового пространства — нечетно, то $\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}$ имеет хотя бы один собственный вектор либо с положительным, либо с отрицательным собственным значением.*

Доказательство. Докажем сначала заключение пункта 1. Рассмотрим гауссово отображение

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{P})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{P})\|}, \quad \mathbf{P} \in S^{n-1}$$

единичной сферы S^{n-1} в себя. Индекс векторного поля $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{x} = 0$ равен степени отображения $\mathbf{\Gamma}$. Следовательно, степень $\mathbf{\Gamma}$ отлична от $(-1)^{n-1}$ и поэтому $\mathbf{\Gamma}$ имеет неподвижную точку [87]. Значит существует такой вектор $\mathbf{e}^- \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}^-) = \mu^{-1}\mathbf{e}^-, \quad \mu = \|\mathbf{g}(\mathbf{e}^-)\|^{-1}$$

т. е. имеет место (1.1.15) при $\gamma = -1$.

Чтобы показать, что данное отображение имеет к тому же и антиподальную точку ($\gamma = +1$), нужно рассмотреть антиподальное отображение

$$\mathbf{\Gamma}_-(\mathbf{P}) = -\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}),$$

степень которого также четна.

Следует отметить, что степень Γ всегда будет четной, если каждый элемент из $\operatorname{Im}\Gamma$ имеет четное число прообразов.

Чтобы доказать заключение пункта 2, достаточно рассмотреть касательное векторное поле

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{g}(\mathbf{P}) - \langle \mathbf{g}(\mathbf{P}), \mathbf{P} \rangle \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \in S^{n-1}$$

на сфере S^{n-l} четной размерности (здесь и далее знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$), на котором не существует гладкого векторного поля без нулей [87]. Поэтому можно найти такой вектор $\mathbf{e}^\gamma \in \mathbb{R}^n$, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}^\gamma) = -\gamma\mu^{-1}\mathbf{e}^\gamma, \quad \mu = |\langle \mathbf{g}(\mathbf{e}^\gamma), \mathbf{e}^\gamma \rangle|^{-1}, \quad \gamma = -\operatorname{sign}\langle \mathbf{g}(\mathbf{e}^\gamma), \mathbf{e}^\gamma \rangle.$$

Поскольку вектор $\mathbf{g}(\mathbf{e}^\gamma)$ параллелен $\mathbf{e}^\gamma$, и $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — единственная особая точка векторного поля $\mathbf{g}$, то $\mu^{-1} \neq 0$.

Лемма доказана.

Индекс i векторного поля $\mathbf{g}$ будет четным, если, например, $\mathbf{f}_\mathrm{q}$ — однородное векторное поле четной степени с изолированной особой точкой. Поэтому системы с квадратичной правой частью, *как правило*, имеют прямолинейные асимптотические решения. Чтобы прояснить данное положение, рассмотрим простой пример.

Пример 1.1.4. Условия существования нетривиальных частных асимптотических решений вида

$$x^\gamma(t) = (\gamma t)^{-1}x_0^\gamma, \quad y^\gamma(t) = (\gamma t)^{-1}y_0^\gamma$$

системы дифференциальных уравнений на плоскости

$$\dot{x} = P_1(x,y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2, \quad \dot{y} = P_2(x,y) = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$$

можно выразить, например, в виде неравенств:

$$\Delta = a_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + a_1c_1b_2^2 + b_1^2a_2c_2 - a_1b_1b_2c_2 - b_1c_1a_2b_2 - 2a_1c_1a_2c_2 \neq 0$$
$$\delta = (a_1^2 + a_2^2)(c_1^2 + c_2^2) \neq 0.$$

Поскольку при фиксированном y результант многочленов $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$ как функции от x будет равен $y^4\Delta$, неравенство $\Delta \neq 0$ является условием того, что $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$ при $y \neq 0$ не имеют общих корней (даже комплексных!) [30]. Если $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то многочлены $P_1(x,0)$ и $P_2(x,0)$ обращаются одновременно в нуль лишь при $x = 0$. Аналогично рассматривается случай фиксированного x. Поэтому при соблюдении указанных выше неравенств начало координат $x = y = 0$ будет изолированной особой точкой рассматриваемой системы. Очевидно, что в шестимерном пространстве параметров размерность множества, на котором имеют место равенства $\Delta = 0$ или $\delta = 0$ равна пяти, и поэтому оно имеет меру нуль.

Доказательство теоремы 1.1.2.

1-й шаг. Построение формального решения.

Будем искать формальное решение системы дифференциальных уравнений (1.1.3) в виде рядов

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(\ln(\gamma t))(\gamma t)^{-k\beta}, \tag{1.1.16}$$

где $\mathbf{x}_k$ являются некоторыми полиномиальными функциями от $\ln(\gamma t)$.

Следует отметить, что ряды (1.1.16) аналогичны рядам, используемым при интегрировании линейных систем дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности регулярной особой точки по методу Фробениуса [52].

Отметим аналогию формул (1.1.2) и (1.1.16). Сумма в (1.1.16) получается из соответствующей суммы в (1.1.2) при помощи логарифмической замены времени $t \mapsto \ln(\gamma t)$, т. е. принципы построения решений сильно нелинейных систем аналогичны используемым в первом методе Ляпунова.

Заметим, что если знак полуквазиоднородности χ равен $+1$, то степени t под знаком суммы в (1.1.16) отрицательны; они положительны в противоположном случае.

Докажем, что такое формальное частное решение существует. Воспользуемся тем, что правые части (1.1.3) разложимы в формальные ряды по «квазиоднородным» формам

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}, t).$$

Имеют место следующие тождества, обобщающие (1.1.14):

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mu^{-1}t) = \mu^{\mathbf{G}+(1+\beta m)\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}, t). \tag{1.1.17}$$

Используя (1.1.17), сделаем замену зависимой и независимой переменных

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(s), \quad s = (\gamma t)^{-\beta},$$

в результате которой исходная система уравнений (1.1.3) примет вид

$$-\gamma\beta s\mathbf{y}' = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}, \gamma), \tag{1.1.18}$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной s, а формальное решение (1.1.16) превратится в

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(-1/\beta \ln s)s^k. \tag{1.1.19}$$

Подставим (1.1.19) в (1.1.18) и приравняем коэффициенты при s^k. Предполагая, что первый коэффициент $\mathbf{x}_0$ постоянен, при $k = 0$ получим

$$-\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0, \gamma).$$

Поэтому существование коэффициента $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\gamma$ ряда (1.1.19) гарантируется условиями теоремы (см. (1.1.13)). Для $k \geqslant 1$ имеют место следующие системы уравнений.

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{d\tau} - \mathbf{K}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}), \tag{1.1.20}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ — некоторые полиномиальные вектор-функции своих аргументов, $\tau = -1/\beta \ln s = \ln(\gamma t)$, $\mathbf{K}_k = k\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}$, а

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \gamma d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, \gamma)$$

— так называемая *матрица Ковалевской* [201].

Если предположить, что все коэффициенты вплоть до k-го найдены как некоторые полиномы от τ, то Φ_k представляют собой некоторые известные полиномы от τ. Полученную систему можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и полиномиальной правой частью, которая, как известно, всегда имеет некоторое полиномиальное частное решение $\mathbf{x}_k(\tau)$, степень которого равна $N_k + S_k$, где N_k — степень Φ_k как полинома от τ, а S_k — кратность нуля в ряду собственных значений матрицы $\mathbf{K}_k$. Таким образом, нахождение всех коэффициентов ряда (1.1.19) может быть осуществлено по индукции. Формальное построение частного асимптотического решения (1.1.3) тем самым завершено.

Вообще говоря, коэффициенты $\mathbf{x}_k(\tau)$ находятся неоднозначно, с точностью до аддитивных полиномиальных функций, принадлежащих ядру дифференциального оператора $\dfrac{d}{d\tau} - \mathbf{K}_k$. Поэтому на каждом шаге мы получаем некоторое семейство полиномиальных решений (1.1.20), зависящее от S_k произвольных постоянных. Поэтому в общем случае изложенный алгоритм дает не одно частное решение (1.1.3), а некоторое формальное многообразие таких частных решений.

Отметим, что разложение (1.1.16) не будет содержать степеней логарифмов «времени» γt в двух случаях: а) если среди собственных значений матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ нет чисел вида $-k\beta$, $k \in \mathbb{N}$, и б) если такие числа есть, но проекции векторов $\mathbf{\Phi}_k$ (которые по предположению не зависят от τ) на ядро оператора с матрицей $\mathbf{K}_k$ должны быть нулевыми. Арифметические свойства собственных значений матрицы Ковалевской играют большую роль при проверке системы дифференциальных уравнений на **ARS**-тест. В литературе эти собственные числа также носят название *резонансов* [143] или *показателей Ковалевской* [201].

Наконец, в завершение рассмотрим некоторые свойства собственных значений матрицы $\mathbf{K}$.

Лемма 1.1.2. [201] *Если укороченная система автономна, то -1 всегда принадлежит спектру $\mathbf{K}$.*

Доказательство. Продифференцировав (1.1.14) по μ и положив $\mu = 1$, получим:

$$d\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x})\mathbf{G}\mathbf{x} = (\mathbf{G} + \mathbf{E})\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}). \tag{1.1.21}$$

Обозначим через $\mathbf{p}$ вектор $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}^{\gamma})$. Тогда, используя тождество (1.1.21) и равенство (1.1.13), найдем

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^{\gamma}) - d\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^{\gamma})\mathbf{G}\mathbf{x}_0^{\gamma} = -\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^{\gamma}) = -\mathbf{p}.$$

Лемма доказана.

В неавтономном случае полученный результат не имеет места.

Пример 1.1.5. Вернемся к уравнению Эмдена–Фаулера (см. пример 1.1.3). Рассмотренная система имеет при четных p очевидное решение

$$x(t) = x_0 t^{-2\beta}, \quad y(t) = -2\beta x_0 t^{(p-3)\beta}, \quad \beta = {}^1\!/_{p-1}, \quad x_0 = \left(\frac{2(3-p)}{a(p-1)^2}\right)^{\beta}.$$

Собственные числа матрицы Ковалевской, отвечающей этому решению, равны

$$\rho_{1,2} = \frac{\beta}{2}\left(5 - p \pm \sqrt{1 + 16p - 7p^2}\right).$$

Очевидно, что $\rho_{1,2}$ не обращаются в -1 ни при каком p.

Итак, в автономном случае наличие логарифмов в соответствующих асимптотических разложениях, когда (1.1.3) положительно полуквазиоднородна в смысле определения 1.1.4, является случаем общего положения, т. к. при $k = \mathrm{q} - 1$ происходит вырождение матрицы $\mathbf{K}_k$.

Замечание 1.1.1. Рассмотренные свойства собственных чисел матрицы Ковалевской очевидно не изменятся, если мы будем рассматривать также комплексные решения $\mathbf{x}_0^\gamma$ системы (1.1.13), которые приводят соответственно к рядам (1.1.16) с комплексными коэффициентами.

Следующий шаг в доказательстве теоремы 1.1.2 должен заключаться либо в доказательстве сходимости ряда (1.1.14), либо в асимптотическом анализе его частичных сумм. Вопросы эти очень содержательны и их изложение мы выделим в отдельный параграф.

2. Проблемы сходимости

Итак, в предыдущем параграфе мы доказали, что при выполнении условий теоремы 1.1.2 уравнения (1.1.3) имеют формальное частное решение в виде рядов (1.1.16). Если бы удалось доказать сходимость этих рядов на некотором временном интервале или показать, что они являются асимптотическими разложениями некоторого решения $\mathbf{x}(t)$ класса $\mathbf{C}^\infty[T, +\infty)$ в положительно полуквазиоднородном случае и класса $\mathbf{C}^\infty(0, T^{-1}]$ в отрицательно полуквазиоднородном случае (при положительном γ), где T — достаточно большое положительное число, то теорема 1.1.2 была бы полностью доказана. Поэтому необходим

2-й шаг. Доказательство существования частного решения системы (1.1.3) с асимптотическим разложением (1.1.16).

Доказательство сходимости или расходимости рядов (1.1.16) является достаточно сложной задачей. Например, недоказанные утверждения в уже цитированной работе Г. В. Каменкова [49] касаются именно вопроса сходимости этих рядов. Следует также отметить, что о сходимости имеет смысл говорить лишь в аналитическом случае, когда ряды (1.1.4), представляющие правые части рассматриваемой системы, сходятся в некоторой комплексной области. Стандартный путь доказательства сходимости в подобных ситуациях — применение метода мажорантных оценок, что всегда приводит к громоздким вычислениям. Мы обойдем пока вопрос о сходимости (1.1.16) и докажем, что эти ряды приближают некоторое гладкое решение системы (1.1.3) с заданными асимптотическими свойствами. Приводимые ниже результаты впервые опубликованы в работе [68].

Приведем сначала систему (1.1.3) к виду (1.1.18) и изменим «временной масштаб»:

$$s = \varepsilon\xi, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В результате эта система перепишется в виде

$$-\gamma\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y},\gamma). \tag{1.2.1}$$

Если для построения формального решения (1.1.3) необходимо лишь, чтобы правые части (1.1.3) были представимы в виде формальных рядов (1.1.4), то для последующего мы потребуем, чтобы правые части (1.1.18) и соответственно (1.2.1) были функциями класса $\mathbf{C}^\infty$ по крайней мере в малой окрестности точки $s = 0$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0^\gamma$.

При $\varepsilon = 0$ эта система перейдет в укороченную систему, соответствующую (1.1.9),

$$-\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{G}\mathbf{y} + \gamma\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y},\gamma),$$

которая имеет частное равновесное решение $\mathbf{y}_0(\xi) = \mathbf{x}_0^\gamma$, отвечающее «квазиоднородному лучу» (1.1.12).

После описанного преобразования K-я частичная сумма ряда (1.1.19) примет вид

$$\mathbf{y}_K^\varepsilon(\xi) = \sum_{k=0}^{K}\varepsilon^k\mathbf{x}_k\left(-{}^1\!/_\beta\ln(\varepsilon\xi)\right)\xi^k,$$

откуда видно, что при $\varepsilon \to +0$ эта сумма сходится к $\mathbf{y}_0(\xi) = \mathbf{x}_0$ равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Пусть $K \in \mathbb{N}$ настолько велико, что $-\beta K < \operatorname{Re}\rho_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ρ_i — собственные значения матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$.

Будем искать частное решение (1.2.1) в виде

$$\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}_K^\varepsilon(\xi) + \mathbf{z}(\xi)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, 1]$ с начальным условием $\mathbf{y}(+0) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{z}(\xi)$ имеет асимптотику $\mathbf{z}(\xi) = O(\xi^{K+\delta})$ при $\xi \to +0$, $\delta > 0$ будем считать фиксированным, но достаточно малым.

Запишем (1.2.1) в виде уравнения в банаховом пространстве

$$\varPhi(\varepsilon, \mathbf{z}) = \mathbf{0},$$

$$\varPhi(\varepsilon, \mathbf{z}) = \beta\xi\frac{d}{d\xi}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \gamma\sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}, \gamma). \tag{1.2.2}$$

Будем рассматривать $\varPhi(\varepsilon, \mathbf{z})$ как отображение

$$\varPhi\colon (0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta},$$

где:

$\mathfrak{B}_{1,\Delta}$ — банахово пространство вектор-функций $\mathbf{z}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на $[0, 1]$ вместе со своими первыми производными, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{z}\|_{1,\Delta} = \sup_{[0,1]}\xi^{-\Delta}(\|\mathbf{z}(\xi)\| + \xi\|\mathbf{z}'(\xi)\|)$$

(здесь штрих означает производную по переменной ξ),

$\mathfrak{B}_{0,\Delta}$ — банахово пространство вектор-функций $\mathbf{u}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на $[0, 1]$, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Delta} = \sup_{[0,1]}\xi^{-\Delta}\|\mathbf{u}(\xi)\|,$$

где $\Delta = K + \delta$.

Отметим некоторые свойства отображения $\varPhi$:

а) $\varPhi(0, \mathbf{0}) = \beta\xi\frac{d}{d\xi}\mathbf{y}_0(\xi) + \mathbf{G}\mathbf{y}_0(\xi) + \gamma\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0(\xi), \gamma) = \mathbf{0}$, б) $\varPhi$ непрерывно по ε, $\mathbf{z}$ на $(0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{U}_{1,\Delta}$, где $\mathfrak{U}_{1,\Delta}$ — некоторая окрестность нуля в $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$,

в) $\varPhi$ сильно дифференцируемо по $\mathbf{z}$ на $(0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{U}_{1,\Delta}$, и его дифференциал Фреше

$$\nabla_{\mathbf{z}} \varPhi(\varepsilon, \mathbf{z})\mathbf{h} = \beta\xi \frac{d}{d\xi}\mathbf{h} + \mathbf{G}\mathbf{h} + \gamma \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^m d\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}_J^\varepsilon + \mathbf{z}, \gamma)\mathbf{h},$$
$$\mathbf{h} \in \mathfrak{B}_{1,\Delta}$$

является ограниченным оператором, непрерывно зависящим от $\varepsilon, \mathbf{z}$.

г) Утверждения а), б), в) достаточно очевидны. Менее тривиальным является следующее утверждение

Лемма 1.2.1. *Оператор* $\nabla_{\mathbf{z}} \varPhi(0, \mathbf{0})\colon \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta}$

$$\nabla_{\mathbf{z}} \varPhi(0, \mathbf{0}) = \beta\xi \frac{d}{d\xi} + \mathbf{K}$$

имеет ограниченный обратный.

Доказательство. Докажем существование единственного частного решения системы дифференциальных уравнений

$$\beta\xi \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{B}_{\mathbf{0},\boldsymbol{\Delta}} \tag{1.2.3}$$

с начальным условием $\mathbf{z}(+0) = \mathbf{0}$, удовлетворяющего неравенству

$$\|\mathbf{z}\|_{1,\Delta} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{0,\Delta}, \tag{1.2.4}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}_{\mathbf{0},\boldsymbol{\Delta}}$.

Поскольку пространство $\mathbb{R}^n$ разложимо в прямую сумму инвариантных жордановых подпространств линейного оператора с матрицей $\mathbf{K}$, оценку (1.2.4) достаточно доказать для частного случая, когда $\mathbf{K}$ — комплексная жорданова матрица с собственным значением ρ, $\operatorname{Re}\rho > -\beta\Delta$.

Обозначив $\widetilde{\rho} = \beta^{-1}\rho$, $\widetilde{\mathbf{u}} = \beta^{-1}\mathbf{u}$, перепишем систему (1.2.3) в скалярном виде

$$\begin{aligned} &\xi \frac{dz^i}{d\xi} + \widetilde{\rho} z^i + z^{i+1} = \widetilde{u}^i(\xi), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ &\xi \frac{dz^n}{d\xi} + \widetilde{\rho} z^n = \widetilde{u}^n(\xi). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Для начальных условий $z^1(+0) = \ldots = z^n(+0) = 0$ решение системы (1.2.5) приобретет следующий вид

$$z^n(\xi) = \xi^{-\widetilde{\rho}} \int\limits_0^\xi \eta^{\widetilde{\rho}-1} \widetilde{u}^n(\eta) d\eta,$$

$$z^i(\xi) = \xi^{-\widetilde{\rho}} \int\limits_0^\xi \eta^{\widetilde{\rho}-1} (\widetilde{u}^i(\eta) - z^{i+1}(\eta)) d\eta, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Построенное решение принадлежит, очевидно, пространству $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$. В силу того, что $\operatorname{Re} \widetilde{\rho} > -\Delta$, справедливы следующие оценки

$$\|z^n\|_{1,\Delta} \leqslant (1 + (1 + |\widetilde{\rho}|))(\operatorname{Re} \widetilde{\rho} + \Delta)^{-1} \|\widetilde{u}^n\|_{0,\Delta},$$
$$\|z^i\|_{1,\Delta} \leqslant (1 + (1 + |\widetilde{\rho}|))(\operatorname{Re} \widetilde{\rho} + \Delta)^{-1} \|\widetilde{u}^i - z^{i+1}\|_{0,\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Замечая, что $\|\cdot\|_{0,\Delta} \leqslant \|\cdot\|_{1,\Delta}$ и проводя рекуррентное оценивание каждой координаты $z^i(\xi)$, получим неравенство (1.2.4), откуда следует утверждение о существовании ограниченного обратного у оператора $\nabla_{\mathbf{z}} \Phi(0, \mathbf{0})$.

Лемма доказана.

Итак, выполнены все условия абстрактной теоремы о неявной функции [50], в силу чего для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, если только $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, уравнение (1.2.2) будет иметь решение в пространстве $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$, непрерывно зависящее от ε. Перейдя к переменным $\mathbf{y}, s$, получим, что дифференциальное уравнение (1.1.18) имеет частное решение $\mathbf{y}(s)$ класса $\mathbf{C}^1[0, \varepsilon]$ с асимптотикой

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^K \mathbf{x}_k(-{}^1\!/\!_\beta \ln s) s^k + o(s^K).$$

На самом же деле, поскольку правая часть (1.1.18) является гладкой вектор-функцией, $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^\infty[0, \varepsilon]$. Возвращаясь к исходным переменным $\mathbf{x}, t$, получим требуемое утверждение о существовании гладкого на $[T, +\infty)$ или на $(0, T^{-1}]$, $T = \varepsilon_0^{-1/\beta}$ (если $\gamma > 0$), в зависимости от знака полуквазиоднородности, частного решения исходной системы с заданным главным членом асимптотики.

Теорема 1.1.2 доказана.

Замечание 1.2.1. Только что рассмотренная процедура применения теоремы о неявной функции не позволяет сделать утверждение о сходимости рядов (1.1.19), а следовательно, и (1.1.16). Упомянутый выше метод мажорантного оценивания мог бы скорее всего дать положительный ответ на вопрос о сходимости данных рядов в некоторой окрестности $s = 0$. Ниже мы рассмотрим существенно более сложную проблему сходимости построенных рядов в комплексной области.

В рассмотренной ситуации можно утверждать, что указанные ряды сходятся, если выполнены следующие условия:

1) Правые части (1.1.3) являются комплексно-аналитическими функциями в области, содержащей искомое решение. Следовательно, ряды в правой части (1.1.18) представляют собой некоторую голоморфную вектор-функцию $\mathbf{y}$ в окрестности $\mathbf{x}_0^\gamma$ для достаточно малых s, $|s| < s_0$.

2) Коэффициенты рядов (1.1.19), а следовательно и (1.1.16), не зависят от логарифмов соответствующей переменной.

Этот факт базируется на том обстоятельстве, что логарифмы в разложении (1.1.19) могут появиться лишь на начальных шагах. Для доказательства необходимо слегка видоизменить приведенные выше рассуждения, связанные с применением теоремы о неявной функции, а именно необходимо «сузить» область определения отображения $\Phi\colon (0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta}$, заменив пространства $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$, $\mathfrak{B}_{0,\Delta}$ на пространства $\mathfrak{E}_{1,K}$, $\mathfrak{E}_{0,K}$, где

$\mathfrak{E}_{1,K}$ — банахово пространство вектор-функций $\mathbf{z}\colon \mathscr{K}_1 \to \mathbb{C}^n$, голоморфных внутри единичного круга $\mathscr{K}_1 = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < 1\}$, непрерывных на его границе вместе со своими первыми производными, вещественных на вещественной оси ($\mathbf{z}(\overline{\xi}) = \overline{\mathbf{z}}(\xi)$) и имеющих в центре круга $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$. В качестве нормы $\mathfrak{E}_{1,K}$ рассмотрим выражение

$$\|\mathbf{z}\|_{1,K} = \sup_{|\xi|<1} \xi^{-(K+1)} (\|\mathbf{z}(\xi)\| + \xi \|\mathbf{z}'(\xi)\|)$$

(штрих снова означает производную по переменной ξ).

$\mathfrak{E}_{0,K}$ — банахово пространство вектор-функций $\mathbf{u}\colon \mathscr{K}_1 \to \mathbb{C}^n$, голоморфных внутри единичного круга $\mathscr{K}_1$, непрерывных на его границе, вещественных на вещественной оси ($\mathbf{u}(\overline{\xi}) = \overline{\mathbf{u}}(\xi)$)) и имеющих в центре круга $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$. В качестве нормы $\mathfrak{E}_{0,K}$ рассмотрим выражение

$$\|\mathbf{u}\|_{0,K} = \sup_{|\xi|\leqslant 1} \xi^{-(K+1)} \|\mathbf{u}(\xi)\|.$$

После такого «сужения» области определения и множества значений отображения $\varPhi$ также возможно применение теоремы о неявной функции по рассмотренной схеме. При этом следует лишь немного видоизменить доказательство пункта г).

Лемма 1.2.2. *Дифференциал Фреше* $\nabla_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\varPhi}(0,\mathbf{0})\colon \mathfrak{E}_{1,K} \to \mathfrak{E}_{0,K}$ *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Заметим, что оператор $\nabla_{\mathbf{z}}\varPhi(0,\mathbf{0})$ ограничен и рассмотрим систему дифференциальных уравнений типа (1.2.3)

$$\beta\xi\frac{d\mathbf{z}}{d\xi} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{E}_{0,K}. \tag{1.2.6}$$

Разложим функцию $\mathbf{u}(\xi)$ в ряд Тейлора

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbf{u}_k\xi^k.$$

Решение (1.2.6) также будем искать в виде ряда Тейлора

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbf{z}_k\xi^k.$$

Коэффициенты обоих рядов связаны при этом соотношениями

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_k\mathbf{z}_k, \quad \mathbf{K}_k = k\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}.$$

В силу выполнения неравенств $-\beta K < \operatorname{Re}\rho_i$, $i = 1,\ldots,n$ при любом $k \geqslant K+1$ матрица $\mathbf{K}_k$ невырождена, и, более того, при больших k имеет место асимптотическая оценка $\|\mathbf{K}_k\|^{-1} = O(k^{-1})$. Отсюда после применения известных формул Коши следует, что ряды Тейлора функций $\mathbf{z}(\xi)$ и $\mathbf{z}'(\xi)$ имеют такие же радиусы сходимости, что и ряд для $\mathbf{u}(\xi)$. Следовательно, оператор $\nabla_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\varPhi}(0,\mathbf{0})$ взаимно однозначно отображает пространство $\mathfrak{E}_{1,K}$ на пространство $\mathfrak{E}_{0,K}$. В силу этого по теореме Банаха об обратном операторе [50] $(\nabla_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\varPhi}(0,\mathbf{0}))^{-1}$ ограничен.

Лемма доказана.

Следовательно, возможно применение теоремы о неявной функции, что доказывает сходимость рядов (1.1.19), как рядов Тейлора, изображающих некоторою голоморфную при $|s| < \varepsilon_0$ функцию.

Вообще говоря, описанная процедура неприменима к общему случаю в связи с тем, что риманова поверхность функции $\ln t$ некомпактна, в силу чего не существует разумно утроенного банахова пространства функций, голоморфных на этой поверхности.

В общем случае логарифмы в рядах (1.1.16) «неубиваемы». Ниже мы, однако, сформулируем простые условия, достаточные для существования некоторой «униформизующей» замены времени, после которой соответствующее формальное решение может быть представлено в виде обыкновенных рядов Тейлора. Идея построения такой замены принадлежит американскому математику С. Талиаферро [193]. Доказательство сходимости построенного ряда практически дословно повторяет приведенное выше. Поэтому ряды (1.1.16), построенные в «реальном времени», также сходятся.

Теорема 1.2.1. *Пусть система* (1.1.3) *автономна, положительно полуквазиоднородна в смысле определения* 1.1.4 *и выполнены все условия теоремы* 1.1.2. *Пусть правые части системы* (1.1.18) *голоморфны в малой окрестности* $s = 0$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_\mathbf{0}^\gamma$. *Если число* -1 *является единственным решением характеристического уравнения* $\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0$ *вида* $\rho = -k\beta$, $k \in \mathbb{N}$, *то существует частное решение системы* (1.1.3) $\mathbf{x}(t)$ *с асимптотическим разложением* (1.1.16) *такое, что* $s^{-\mathbf{S}}\mathbf{x}(t(s))$ *является вектор-функцией, голоморфной в области* $|s| < \varepsilon_0$ *где* $\varepsilon_0 > 0$ *достаточно мало,* $\mathbf{S} = (\mathrm{q}-1)\mathbf{G}$, *а* $t(s) = \gamma(s^{1-\mathrm{q}} - \alpha\beta^{-1}\ln s)$, α *— некоторый действительный параметр.*

В работе [68], где опубликован этот результат, допущен ряд неточностей и опечаток.

Доказательство. Функция $t(s)$ является обратной к решению дифференциального уравнения

$$\dot{s} = -\gamma\beta\frac{s^{\mathrm{q}}}{(1+\alpha s^{\mathrm{q}-1})}, \tag{1.2.7}$$

удовлетворяющего условию $s(\gamma \times \infty) = 0$.

Сделаем замену зависимой переменной $\mathbf{x}(t) = s^{\mathbf{S}}\mathbf{y}(s)$ и замену независимой переменной $t \mapsto s$, определяемую уравнением (1.2.7). После этого система (1.1.3) примет вид

$$-\gamma\beta s\mathbf{y}' = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + (1+\alpha s^{\mathrm{q}-1})\sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}). \tag{1.2.8}$$

Для автономного случая при $\alpha = 0$ эта система превращается в (1.1.18). Похожесть систем (1.1.18) и (1.2.8) обусловливается еще и тем, что решение уравнения (1.2.7), подчиняющееся условию $s(\gamma \times \infty) = 0$, имеет асимптотику $s(t) \sim (\gamma t)^{-\beta}$.

Формальное частное решение (1.2.8) будем искать в виде обычных рядов Тейлора

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k s^k. \tag{1.2.9}$$

Подставим (1.2.9) в (1.2.8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной s. Для нулевой степени s получим

$$-\mathbf{G}\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0),$$

в силу чего $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0^{\gamma}$.

Для k-х степеней s, $k < \mathrm{q} - 1$, имеем уравнения

$$\mathbf{K}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}), \quad \mathbf{K}_k = k\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}, \tag{1.2.10}$$

где величины $\mathbf{\Phi}_k$ полиномиально зависят от своих аргументов и не зависят пока от параметра α, который еще подлежит определению.

Поскольку при $k \neq \mathrm{q}-1$ матрицы $\mathbf{K}_k$ невырождены, коэффициенты $\mathbf{y}_k$ находятся однозначно по формулам

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{K}_k^{-1}\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}).$$

Для $k = \mathrm{q} - 1$ имеем

$$\mathbf{K}_{\mathrm{q}-1}\mathbf{y}_{\mathrm{q}-1} = \alpha\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{q}-1}(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{\mathrm{q}-2}), \quad \mathbf{K}_{\mathrm{q}-1} = \mathbf{K} + \mathbf{E}. \tag{1.2.11}$$

Заметим, что $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ — собственный вектор матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ с собственным значением $\rho = -1$.

Разложим $\mathbf{y}_{\mathrm{q}-1}$, $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{q}-1}$ в суммы компонент, соответственно принадлежащих собственному подпространству матрицы $\mathbf{K}$, порожденному вектором $\mathbf{p}$, и его ортогональному дополнению:

$$\mathbf{y}_{\mathrm{q}-1} = y_{\mathrm{q}-1}\mathbf{p} + \mathbf{y}_{\mathrm{q}-1}^{\perp},\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{q}-1} = \phi_{\mathrm{q}-1}\mathbf{p} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{q}-1}^{\perp}.$$

Поскольку на инвариантном подпространстве, ортогональном вектору $\mathbf{p}$, оператор $\mathbf{K}_{\mathrm{q}-1}$ невырожден, то

$$\mathbf{y}_{\mathrm{q}-1}^{\perp} = \mathbf{K}_{\mathrm{q}-1}^{-1}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{q}-1}^{\perp}.$$

Положив $\alpha = -\phi_{\mathrm{q}-1}$, окончательно удовлетворим уравнениям (1.2.11). Число $y_{\mathrm{q}-1}$ можно выбрать теперь произвольным.

При $k > \mathrm{q} - 1$ уравнения для нахождения $\mathbf{y}_k$ также имеют вид (1.2.10), где величины $\mathbf{\Phi}_k$ зависят от найденного выше параметра α. Эти уравнения аналогично предыдущему легко разрешаются относительно $\mathbf{y}_k$ в силу невырожденности матриц $\mathbf{K}_k$.

Итак, мы показали, что уравнение (1.2.8) имеет частное формальное решение, представимое в виде ряда Тейлора (1.2.9). Докажем теперь, что (1.2.9) является рядом Тейлора некоторой функции, голоморфной в круге $|s| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

Доказательство практически дословно повторяет изложенное в замечании 1.2.1. После замены $s = \varepsilon\xi$, $0 < \varepsilon \ll 1$ система (1.2.8) примет вид

$$-\gamma\boldsymbol{\beta}\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + (1 + \alpha\varepsilon^{\mathrm{q}-1}\xi^{\mathrm{q}-1})\sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}). \qquad (1.2.12)$$

Обозначим через $\mathbf{y}_K^\varepsilon$ конечную сумму

$$\mathbf{y}_K^\varepsilon(\xi) = \sum_{k=0}^{K}\varepsilon^k\mathbf{y}_k\xi^k,$$

где $-\boldsymbol{\beta}K < \operatorname{Re}\rho_i$, $i = 1, \ldots, n$, и будем искать частное решение (1.2.12) в виде

$$\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}_K^\xi(\xi) + \mathbf{z}(\xi),$$

где $\mathbf{z}(\xi)$ — некоторая голоморфная в круге $|\xi| < 1$ функция, имеющая в точке $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$.

Для доказательства существования такого решения достаточно применить теорему о неявной функции [50] к уравнению в банаховом пространстве

$$\Phi(\varepsilon, \mathbf{z}) = \mathbf{0},$$
$$\Phi\colon (0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{E}_{1,k} \to \mathfrak{E}_{0,k},$$

где

$$\Phi(\varepsilon, \mathbf{z}) = \gamma\beta\xi\frac{d}{d\xi}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) +$$
$$+\gamma(1 + \alpha\varepsilon^{\mathrm{q}-1}\xi^{\mathrm{q}-1})\sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}).$$

Уравнение (1.2.7) имеет частное решение $s(t)$, $s(+\infty) = 0$, являющееся функцией, обратной к

$$t(s) = \gamma(s^{1-\mathrm{q}} - \alpha\boldsymbol{\beta}^{-1} \ln s).$$

Пусть $\mathscr{R}$ — риманова поверхность функции $s(t)$. Система уравнений (1.2.8) имеет голоморфное частное решение $\mathbf{y}(s)$, поэтому вектор-функция $\mathbf{y}(s(t))$ голоморфна на накрытии области $|t| > \varepsilon_0^{-1/\beta}$ римановой поверхностью $\mathscr{R}$ и для нее (1.1.19) является асимптотическим разложением.

Теорема доказана.

Итак, в этом параграфе мы завершили доказательство теоремы 1.1.2. Эта теорема имеет важные приложения в теории устойчивости движения. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *— особая точка системы* (1.1.3) *и пусть система* (1.1.3) *автономна. Пусть система* (1.1.3) *положительно полуквазиоднородна относительно квазиоднородной структуры, порождаемой матрицей* $\mathbf{G}$*, собственные числа которой имеют положительные действительные части. Если существует вектор* $\mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{x}_0^- \neq \mathbf{0}$ *такой, что*

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_0^- = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^-)$$

(*т. е.* $\gamma = -1$)*, то особая точка* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчива.*

Доказательство следует непосредственно из факта существования частного решения $t \mapsto x(t)$ такого, что $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$.

На настоящей момент это наиболее общий результат, связывающий неустойчивость равновесия в полной системе и в укороченной (так называемой модельной) системе. Здесь фактически доказано, что наличие частного решения тина растущего квазиоднородного луча у модельной системы влечет за собой неустойчивость равновесия полной системы. До недавнего времени это утверждение являлось лишь гипотезой, доказать которую пытались многие авторы, причем эти попытки касались, в основном, лишь «полуоднородных» систем. В этой связи стоит упомянуть уже цитировавшиеся результаты Каменкова [49], доказательство которых, как уже отмечалось, содержит ряд пробелов. В книге [125] дано достаточно простое доказательство этого факта для случая притягивающего луча. Более общий случай, когда луч является гиперболическим, гораздо более сложен. Соответствующий результат доказан в работе [138] при помощи весьма непростой топологической техники. Термины: «притягивающий луч», «гиперболический луч» связана с расположением собственных чисел матрицы Ковалевской на комплексной плоскости. Теорема 1.2.2 доказывает указанную гипотезу полностью.

В своем классическом труде [81] А. М. Ляпунов рассматривал более общую задачу об устойчивости решений по отношению к заданным функциям от состояния системы. Покажем, как развиваемый нами подход можно применить к этой более общей ситуации [33]. С этой целью рассмотрим гладкую систему (1.1.1) с особой точкой $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; тогда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — ее положение равновесия. Исследуем его устойчивость по отношению к гладкой (бесконечно-дифференцируемой) функции $Q(\mathbf{x})$. Будем считать, что $Q(\mathbf{0}) = 0$.

Введем новую систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.2.13}$$

полученную из (1.1.1) обращением времени.

Лемма 1.2.3. *Пусть система* (1.2.13) *допускает решение* $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ *такое, что*

1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to +\infty$,

2) $q(t) = Q(\mathbf{x}(t)) \not\equiv 0$.

Тогда равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1.1.1) *неустойчиво по отношению к функции* Q.

Действительно, в этом случае имеется решение $t \mapsto \mathbf{x}(-t)$, которое асимптотически «выходит» из состояния равновесия. По непрерывности, $q(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Следовательно, вдоль этого решения функция Q изменяется от нуля до заметных конечных значений. Но это и означает неустойчивость равновесия по отношению к Q.

Асимптотические решения уравнений (1.2.13) можно искать в виде рядов определенного вида. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица Якоби векторного поля $\mathbf{f}$ в нуле. Если эта матрица имеет положительное вещественное собственное значение β, то система (1.2.13) допускает асимптотическое решение в виде ряда (1.1.2). Подставляя этот ряд в разложение Маклорена функции Q, снова получим ряд по степеням $\exp(-\beta t)$, коэффициенты которого — многочлены от t. Если хотя бы один из коэффициентов этого ряда отличен от нуля, то (по лемме 1.2.3) равновесие системы (1.1.1) неустойчиво по отношению к функции Q.

Это наблюдение можно обобщить. Необходимое условие устойчивости равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для системы (1.1.1) по отношению к функции Q заключается в постоянстве этой функции на неустойчивом многообразии системы (1.1.1). Последнее свойство проверяется конструктивно с помощью итерационного метода построения рядов Ляпунова, которые представляют асимптотические (при $t \to -\infty$) решения системы (1.1.1).

В вырожденных случаях асимптотические решения системы (1.2.13) можно искать в форме ряда (1.1.16). Условия существования таких решений дает теорема 1.2.1. Следующее утверждение обобщает теорему 1.2.2. Но прежде дадим общее определение квазиоднородных и полуквазиоднородных функций.

Пусть $\mathbf{G}$ — некоторая вещественная матрица из (1.1.10), задающая квазиоднородную структуру в $\mathbb{R}^n[\mathbf{x}]$.

Определение 1.2.1. Функция $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *квазиоднородной* степени m, если

$$Q(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \mu^m Q(\mathbf{x}) \tag{1.2.14}$$

при всех $\mu > 0$.

Если $G = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то соотношение (1.2.14) имеет следующий явный вид:

$$Q(\mu^{\alpha_1} x_1, \ldots, \mu^{\alpha_n} x_n) = \mu^m Q(x_1, \ldots, x_n).$$

При $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$ имеем обычную однородную функцию степени m.

Дифференцируя (1.2.14) по μ и полагая затем $\mu = 1$, получаем обобщенное *тождество Эйлера*

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{G} \right\rangle = mQ.$$

Определение 1.2.2. Функция Q называется положительно (отрицательно) полуквазиоднородной, если ее можно представить в виде $Q_m(\mathbf{x}) + \tilde{Q}(\mathbf{x})$, где Q_m — квазиоднородная функция степени m, а

$$\mu^{-m}\tilde{Q}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) \to 0$$

при $\mu \to 0$ ($\mu \to +\infty$).

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.2.2 *для системы* (1.2.13)*, Q — гладкая положительно полуквазиоднородная функция и*

$$Q_m(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Тогда равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *исходной системы* (1.1.1) *неустойчиво по отношению к функции Q.*

Это утверждение — простое следствие теоремы 1.1.2 и леммы 1.2.3.

Предположим теперь, что система (1.2.13) допускает асимптотическое решение в виде ряда (1.1.16). Тогда подстановка этого ряда в формальный ряд Маклорена бесконечно-дифференцируемой функции Q даст нам разложение функции $t \mapsto q(t)$ в ряд подобного вида (по обратным степеням t^{β}, а коэффициенты — многочлены с постоянными коэффициентами от логарифмов времени). Если хотя бы один коэффициент этого формального ряда отличен от нуля, то тривиальное равновесие системы (1.1.1) неустойчиво по отношению к функции Q. Мы вернемся к этим вопросам в главе 3.

3. Экспоненциальные методы нахождения неэкспоненциальных решений

В предыдущих двух параграфах был изложен метод построения частных решений дифференциальных уравнений, главные члены асимптотики которых определяются квазиоднородной структурой выделенного укорочения. Приведенные алгоритмы позволяют эффективно строить требуемые решения в виде рядов. Однако, даже на первый взгляд видно, что указанный метод дает далеко не все решения с требуемой асимптотикой. Как ряды типа (1.1.2) не исчерпывают всех решений экспоненциального типа, так и ряды (1.1.16) не описывают всех решений с обобщенно степенной асимптотикой. В квазилинейном случае все экспоненциальные решения лежат соответственно на устойчивом и неустойчивом многообразиях $W^{(s)}$, $W^{(u)}$. Для рассматриваемого «сильно нелинейного» случая мы установим результаты, родственные теореме Адамара–Перрона, т. е. попытаемся применить технику, типичную для поиска решений с экспоненциальной асимптотикой.

В этом параграфе мы несколько изменим условия, налагаемые на правые части системы (1.1.3). Пусть (1.1.3) либо автономна, либо ее правые части являются ограниченным функциями времени t на всей числовой прямой.

Начнем с автономного случая. Имеет место

Теорема 1.3.1. *Предположим, что правые части системы* (1.1.3) *не зависят явно от t. Пусть выполнены все условия теоремы* 1.1.2 *и l характеристических чисел матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ имеют вещественные части, знак которых совпадает со знаком величины $-\boldsymbol{\beta}$, в то время как вещественные части остальных либо нулевые, либо имеют противоположный знак. Тогда* (1.1.3) *имеет l-параметрическое семейство частных решений вида*

$$\mathbf{x}(\mathbf{c}, t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^{\gamma} + o(1)) \quad \textit{при } t^{\chi} \to \gamma \times \infty,$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^l$ — вектор параметров.

Этот результат является следствием более общей теоремы 1.3.3, которую мы сформулируем и докажем позже.

Существует еще одна проблема, связанная с поиском асимптотических решений при помощи изложенных выше алгоритмов. В § 1 мы искали частные решения укороченной квазиоднородной системы (1.1.9) в виде (1.1.12). Неизвестно, однако, исчерпываются ли все возможные решения квазиоднородных систем, имеющие обобщенно степенную асимптотику, решениями типа (1.1.12)? Может случиться так, что ни одно из возможных квазиоднородных укорочений не имеет частного решения в виде квазиоднородного луча, хотя полная система имеет асимптотическое решение. Это побуждает нас рассмотреть вопрос о существовании частных решений укорочений типа (1.1.9) в «нестационарном» виде, более общем, чем (1.1.12), а именно

$$\mathbf{x}^{\gamma}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \mathbf{x}_0^{\gamma}(\gamma t), \tag{1.3.1}$$

где $\mathbf{x}_0^{\gamma}(\cdot)$ — бесконечно-дифференцируемая, ограниченная на положительной полупрямой вектор-функция, и покажем, что при довольно слабых ограничениях эти решения также порождают решения полной системы с аналогичной асимптотикой. Мы расширим также класс изучаемых систем, рассмотрев неавтономные системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1.3.2}$$

где компоненты правых частей допускают разложение в формальные степенные ряды

$$f^j = \sum_{i_1,\ldots,i_n} f^j_{i_1,\ldots,i_n}(t)(x^1)^{i_1} \ldots (x^n)^{i_n}, \tag{1.3.3}$$

а коэффициенты $f^j_{i_1,\ldots,i_n}(t)$ являются гладкими, равномерно ограниченными на всей оси $\mathbb{R}[t]$ функциями.

Пусть далее система (1.3.2), *где время t в правых частях рассматривается как параметр*, является полуквазиоднородной в смысле определения 1.1.6 относительно квазиоднородной структуры, порождаемой некоторой матрицей $\mathbf{G}$. Рассмотрим укороченную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t) \tag{1.3.4}$$

и будем искать ее частные решения в виде (1.3.1).

Сделав логарифмическую замену независимой переменной $\tau = \ln(\gamma t)$, получим, что в «новом времени» вектор-функция $\mathbf{x}_0^{\gamma}(\cdot)$ является частным решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}_0^\gamma}{d\tau} = \mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma + \gamma\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, \gamma e^\tau). \tag{1.3.5}$$

Линеаризовав (1.3.5) в окрестности некоторого решения $\mathbf{x}_0^\gamma(\cdot)$, получим линейную систему

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}, \tag{1.3.6}$$

где

$$\mathbf{K}(\tau) = \mathbf{G} + \gamma d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma(\gamma e^\tau), \gamma e^\tau)$$

— неавтономная матрица Ковалевской, компоненты которой в силу ограниченности $\mathbf{x}_0^\gamma$ и коэффициентов в разложении (1.3.3) являются гладкими, ограниченными на всей числовой прямой функциями τ.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 1.1.2.

Лемма 1.3.1. *Если система* (1.3.4) *автономна, то система* (1.3.6) *имеет частное решение*

$$\mathbf{u}_0(\tau) = e^{-\tau}\mathbf{p}(\tau), \qquad \mathbf{p}(\tau) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma(\gamma e^\tau)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, используя определение неавтономной матрицы Ковалевской, систему (1.3.5) и равенство (1.1.21), получим

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{d\tau} = e^\tau\left(-\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma)\frac{d\mathbf{x}_0^\gamma}{d\tau}\right) = e^{-\tau}(-\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma)(\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma + \gamma\mathbf{p})) =$$
$$= e^{-\tau}(\mathbf{G} + \gamma d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma))\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u}_0.$$

Лемма доказана.

Если ограниченная вектор-функция $p(\tau)$ не стремится к нулю при $\tau \to \to \pm\infty$, характеристический показатель решения (1.3.6) $\mathbf{u}_0(\tau)$ равен -1, поэтому -1, как правило, принадлежит полному спектру линейной системы (1.3.6).

Напомним кратко некоторые понятия из теории асимптотического поведения решений линейных неавтономных систем типа (1.3.6). Для подробного знакомства с предметом можно порекомендовать соответствующие разделы в книге [39].

Правым *характеристическим показателем* некоторой скалярной или векторной функции произвольной размерности $\mathbf{u}(\tau)$ называется величина

$$r^+ = \kappa^+[\mathbf{u}(\tau)] = \overline{\lim_{\tau\to+\infty}}\, \tau^{-1} \ln \|\mathbf{u}(\tau)\|,$$

соответственно левым характеристическим показателем назовем величину

$$r^- = \kappa^-[\mathbf{u}(\tau)] = \kappa^+[\mathbf{u}(-\tau)].$$

Всюду ниже, если специально не оговорено обратное, мы будем говорить о «правых» показателях, определяющих асимптотическое поведение функций при $\tau \to +\infty$, поскольку переход к «левым» (случай $\tau \to -\infty$) осуществляется посредством обращения независимой переменной $\tau \mapsto -\tau$.

Отметим некоторые свойства введенных величин.

Для любой вектор-функции $\mathbf{u}(\tau)$ и постоянной τ_0

$$\kappa[\mathbf{u}(\tau - \tau_0)] = \kappa[\mathbf{u}(\tau)].$$

Пусть $\mathbf{u}_{(1)}(\tau), \mathbf{u}_{(2)}(\tau)$ — две вектор-функции с конечными характеристическими показателями. Характеристические показатели их линейной комбинации $c_1\mathbf{u}_{(1)}(\tau) + c_2\mathbf{u}_{(2)}(\tau)$ и обобщенного «произведения» $\mathbf{B}(\mathbf{u}_{(1)}(\tau), \mathbf{u}_{(2)}(\tau))$, где $\mathbf{B}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ некоторая билинейная вектор-функция, обладают следующими свойствами

$$\kappa[c_1\mathbf{u}_{(1)}(\tau) + c_2\mathbf{u}_{(2)}(\tau)] = \max\bigl(\kappa[\mathbf{u}_{(1)}(\tau)], \kappa[\mathbf{u}_{(2)}(\tau)]\bigr)$$
$$\kappa[\mathbf{B}(\mathbf{u}_{(1)}(\tau), \mathbf{u}_{(2)}(\tau))] \leqslant \kappa[\mathbf{u}_{(1)}(\tau)] + \kappa[\mathbf{u}_{(2)}(\tau)].$$

Если $\mathbf{u}(\tau)$ — вектор-функция с конечным неотрицательным характеристическим показателем, то

$$\kappa\left[\int\limits_0^\tau \mathbf{u}(\xi)d\xi\right] \leqslant \kappa[\mathbf{u}(\tau)],$$

если же характеристический показатель $\mathbf{u}(\tau)$ отрицателен, то

$$\kappa\left[\int\limits_\tau^{+\infty} \mathbf{u}(\xi)d\xi\right] \leqslant \kappa[\mathbf{u}(\tau)].$$

Пусть, далее, $\mathbf{U}(\tau) = (u^i_j(\tau))^n_{i,j=1}$ — некоторая матрица с гладкими ограниченными компонентами. Ее характеристическим показателем называется величина

$$\kappa\bigl[\mathbf{U}(\tau)\bigr] = \max_{i,j}\bigl(\kappa\bigl[u^j_i(\tau)\bigr]\bigr) = \max_{i,j}\left(\overline{\lim_{\tau\to+\infty}}\, \tau^{-1} \ln |u^i_j(\tau)|\right).$$

Полным спектром линейной системы (1.3.6) назовем набор величин $\{r_i = \kappa[\mathbf{u}_{(i)}(\tau)]\}_{i=1}^n$, где $\{\mathbf{u}_{(i)}(\tau)\}_{i=1}^n$ — некоторая фундаментальная система ее решений. Если система (1.3.6) автономна, то $r_i = \operatorname{Re}\rho_i$, где ρ_i — корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0$.

Очевидно, что полный спектр системы (1.3.6) зависит от выбора фундаментальной системы решений. Для любой фундаментальной системы решений имеет место так называемое неравенство Ляпунова [81]:

$$\sum_{i=1}^n r_i \geqslant \varlimsup_{\tau\to+\infty} \tau^{-1} \int_0^\tau \operatorname{Sp}\mathbf{K}(\xi)d\xi, \tag{1.3.7}$$

где $\operatorname{Sp}\mathbf{K}$ означает след матрицы $\mathbf{K}$.

Существует фундаментальная система решений, называемая *нормальной*, для которой сумма характеристических показателей является максимальной [39].

Для некоторой нормальной системы решений $\{\mathbf{u}_i(\tau)\}_{i=1}^n$ *мерой неправильности* назовем неотрицательную в силу неравенства Ляпунова (1.3.7) величину

$$\sigma = \sum_{i=1}^n r_i - \varliminf_{\tau\to+\infty} \tau^{-1} \int_0^\tau \operatorname{Sp}\mathbf{K}(\xi)d\xi.$$

Система (1.3.6) называется *правильной*, если для некоторой нормальной системы ее решений мера неправильности σ равна нулю. При этом в неравенстве Ляпунова (1.3.7) имеет место строгое равенство.

Определения и понятия, приведенные выше, касались асимптотического поведения решений системы (1.3.6) при $\tau \to +\infty$. Для того, чтобы ввести аналогичные характеристики для случая $\tau \to -\infty$ следует рассмотреть систему с обращенным временем

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = -\mathbf{K}(-\tau)\mathbf{u}. \tag{1.3.8}$$

Ниже будет показано, что задача отыскания частных решений системы (1.3.2), имеющих неэкспоненциальную асимптотику, может быть сведена к исследованию некоторой квазилинейной системы, линейная часть которой имеет вид (1.3.6), т. е. к применению «экспоненциальных» методов. Мы сформулируем несколько результатов, обобщающих известные теоремы В. И. Зубова [44].

Докажем сперва для системы (1.3.2) аналог теоремы 1.1.2.

Теорема 1.3.2. *Пусть квазиоднородное укорочение* (1.3.4) *полуквазиоднородной системы* (1.3.2) *имеет частное решение вида* (1.3.1) *и пусть мера неправильности системы* (1.3.6) (*для случая* $\beta > 0$) *или мера неправильности системы* (1.3.8) (*для случая* $\beta < 0$) *удовлетворяет неравенству*

$$\sigma < {}^{|\beta|}\!/_{2}. \tag{1.3.9}$$

Тогда (1.3.2) *имеет частное решение с главным членом асимптотики* $(\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^\gamma(\gamma t)$ *при* $t^\chi \to \gamma \times \infty$.

Доказательство так же, как и в предыдущих параграфах, разобьем на два этапа.

1-й шаг. Построение формального решения.

Сначала построим формальное решение системы уравнений (1.3.2) в виде ряда

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}, \tag{1.3.10}$$

где $\mathbf{x}_k(\tau)$, $\tau = \ln(\gamma t)$ — некоторые, определенные на всей числовой оси, вектор-функции, характеристические показатели которых подчиняются неравенствам

$$\chi\mathbf{k}^\chi\big[\mathbf{x}_k(\tau)\big] \leqslant (2k-1)\sigma. \tag{1.3.11}$$

Символ κ^χ означает здесь характеристический показатель κ^+ или κ^- в зависимости от знака полуквазиоднородности.

В силу выполнения неравенства (1.3.9), неравенство (1.3.11) гарантирует, что искомое решение по крайней мере формально имеет требуемую асимптотику.

Сделаем замену зависимой и независимой переменных $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}$, $t \mapsto \tau$

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma(\gamma t) + \mathbf{u}(\gamma)),\ \tau = \ln(\gamma t).$$

После этого система (1.3.2) перепишется в виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u},\tau) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u},\tau), \tag{1.3.12}$$

где штрих означает производную по новому «времени» τ,

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u},\tau) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma + \mathbf{u}, \gamma e^\tau) - \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, \gamma e^\tau) - d_{\mathrm{x}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, \gamma e^\tau)\mathbf{u}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u},\tau)$ является ограниченной вектор-функцией τ при всех фиксированных конечных $\mathbf{u}$ и, кроме того, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u},\tau) = O(\|\mathbf{u}\|^2)$ при $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$ равномерно по τ.

Вектор-функция $\psi(\mathbf{u},\tau)$ допускает формальное разложение в виде ряда

$$\psi(\mathbf{u},\tau) = \sum_{m-1} e^{-m\beta\tau}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m\chi}(\mathbf{x}_0^\gamma + \mathbf{u}, \gamma e^\tau).$$

Как и раньше, мы предполагаем, что правые части (1.3.2) гладкие, по крайней мере, в некоторой области, содержащей искомое решение. Поэтому $\psi(\mathbf{u},\tau) = O(e^{-\beta\tau})$ при $\tau \to \chi \times \infty$ при каждом фиксированном $\mathbf{u}$.

Имеет место следующая

Лемма 1.3.2. *При сделанных выше предположениях относительно свойств матрицы* $\mathbf{K}(\tau)$ *и вектор-функций* $\phi(\mathbf{u},\tau)$ *и* $\psi(\mathbf{u},\tau)$ *система уравнений* (1.3.12) *имеет формальное частное решение вида*

$$\mathbf{u}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k(\tau) e^{-k\beta\tau}, \tag{1.3.13}$$

характеристические показатели коэффициентов которого удовлетворяют неравенствам (1.3.11).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $\chi = +1$. Противоположный случай сводится к данному посредством обращения «логарифмического времени» $\tau \mapsto -\tau$.

Подставим (1.3.13) в (1.3.12) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $e^{-\beta\tau}$. Коэффициенты $\mathbf{x}_k(\tau)$ ряда (1.3.13) найдем по индукции. Предположим, что $\mathbf{x}_1(\tau), \ldots, \mathbf{x}_{k-1}(\tau)$ найдены, и их характеристические показатели удовлетворяют неравенствам (1.3.11). Запишем дифференциальное уравнение для определения $\mathbf{x}_k(\tau)$

$$\mathbf{x}_k' - \mathbf{K}(\tau)\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \tau), \tag{1.3.14}$$

где $\mathbf{K}_k(\tau) = k\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}(\tau)$, а $\mathbf{\Phi}_k$ являются некоторыми вектор-функциями, ограниченными по τ и полиномиально зависящими от $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$.

Воспользовавшись свойствами характеристических показателей линейной комбинации и обобщенного произведения, можно доказать, что характеристические показатели вектор-функций $\mathbf{\Phi}_k$ после подстановки в них $\mathbf{x}_1(\tau), \ldots, \mathbf{x}_{k-1}(\tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$\kappa\big[\mathbf{\Phi}_k(\tau)\big] = \kappa\big[\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}_1(\tau), \ldots, \mathbf{x}_{k-1}(\tau), \tau)\big] \leqslant (2k-2)\sigma. \tag{1.3.15}$$

Индекс «+» для сокращения записи далее будем опускать. Докажем, что система дифференциальных уравнений (1.3.14) имеет частное решение, характеристический показатель которого удовлетворяет неравенству (1.3.11).

Пусть $\mathbf{U}(\tau)$ — фундаментальная матрица системы (1.3.6), нормированная условием $\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}$. Пусть $r_1,\ldots,r_n$ — полный спектр системы (1.3.6). Рассмотрим диагональную матрицу $\mathbf{R}=\operatorname{diag}(r_1,\ldots,r_n)$.

Произведем замены

$$\mathbf{x}_k = e^{k\beta\tau}\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{y}_k,$$
$$\mathbf{\Psi}_k(\tau) = e^{-k\beta\tau}\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{\Phi}_k(\tau).$$

В новых переменных система уравнений (1.3.14) примет вид

$$\mathbf{y}_k' - \mathbf{R}\mathbf{y}_k = \mathbf{\Psi}_k(\tau). \tag{1.3.16}$$

Согласно оценке (1.3.15) и общим свойствам характеристических показателей

$$\kappa[\mathbf{\Psi}_\tau(\tau)] \leqslant -k\beta + (2k-2)\sigma + \kappa[\exp(\mathbf{R}_\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)].$$

Воспользуемся формулой обратной матрицы

$$\mathbf{U}^{-1}(\tau) = (\Delta^{-1}(\tau)\Delta_i^j(\tau))_{i,j=1}^n,$$

где $\Delta(\tau) = \det\mathbf{U}(\tau)$, а $\Delta_j^i(\tau)$ — алгебраические дополнения к элементам $u_j^i(\tau)$.

Учитывая, что $\Delta(0)=1$ и используя формулу Остроградского–Лиувилля, будем иметь

$$\Delta(\tau) = e^{\int\limits_0^\tau \operatorname{Sp}\mathbf{K}(\xi)d\xi}.$$

Напомним, что столбцами фундаментальной матрицы $\mathbf{U}(\tau)$ являются вектор-функции, принадлежащие фундаментальной системе решений $\left\{\mathbf{u}_{(i)}(\tau)\right\}_{i=1}^n$, поэтому

$$\kappa\bigl[\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\bigr] = \max_{i,j}\left(\kappa\left[e^{r_i\tau}\Delta_i^j(\tau)e^{-\int\limits_0^\tau \operatorname{Sp}\mathbf{K}(\xi)d\xi}\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i,j}\left(r_i + \sum_{l=1}^n r_l - r_i - \varliminf_{\tau\to+\infty}\tau^{-1}\int\limits_0^\tau \operatorname{Sp}\mathbf{K}(\xi)d\xi\right) = \sigma.$$

Следовательно,

$$\kappa[\mathbf{\Psi}_k(\tau)] \leqslant -k\beta + (2k-1)\sigma.$$

Перепишем (1.3.16) в координатной форме

$$(y_k^i)' - r_i y_k^i = \Psi_k^i(\tau), \quad i=1,\ldots,n,$$

и построим частное решение этой системы по следующему правилу:

$$y_k^i(\tau) = -e^{r_i\tau} \int\limits_{\tau}^{+\infty} e^{-r_i\xi}\Psi_k^i(\xi)d\xi$$

для тех i, для которых $\kappa\left[e^{-r_i\tau}\Psi_k^i(\tau)\right] < 0$, и

$$y_k^i(\tau) = e^{r_i\tau}\left(c_k^i + \int\limits_0^{\tau} e^{-r_i\xi}\Psi_k^i(\xi)d\xi\right)$$

для тех i, для которых $\kappa\left[e^{-r_i\tau}\Psi_k^i(\tau)\right] \geqslant 0$, где $c_k^i \in \mathbb{R}$ — свободные параметры, которые можно выбирать произвольно, если характеристический показатель стоящего в полученной формуле интеграла неотрицателен и которые следует положить равными нулю в противном случае.

Из приведенных формул видно, что характеристический показатель построенного таким способом решения (1.3.16) удовлетворяет оценке

$$\kappa[\mathbf{y}_k(\tau)] \leqslant -k\beta + (2k-1)\sigma.$$

Вычислим характеристический показатель матрицы $\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)$:

$$\kappa[\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)] = \max_{i,j}\left(\kappa\left[u_j^i(\tau)e^{-r_i\tau}\right]\right) = 0.$$

Поэтому $\mathbf{x}_k = e^{k\beta\tau}\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{y}_k$ имеет характеристический показатель, удовлетворяющий неравенству (1.3.11).

Итак, $\mathbf{x}_k(\tau)$ является искомым решением (1.3.14). Конструкция ряда (1.3.13) полностью завершена.

Лемма 1.3.2 доказана.

Мы тем самым доказали, что исходная система (1.3.2) имеет формальное решение в виде (1.3.10).

2-й шаг. Перейдем к построению фактического решения.

Лемма 1.3.3. *Пусть в правых частях* (1.3.12) *параметр* β *положителен. Если выполнены условия леммы* 1.3.2, *то система уравнений* (1.3.12) *имеет частное решение вида*

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_K(\tau) + \mathbf{v}(\tau),$$

где $\mathbf{u}_K(\tau)$ — K*-я частичная сумма ряда* (1.3.13)*, а* $\mathbf{v}(\tau)$ *имеет асимптотику*

$$\mathbf{v}(\tau) = o\big(e^{-K\beta\tau}\big) \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty,$$

где $b = \beta - 2\sigma$*, и* K *достаточно велико.*

Доказательство. Запишем систему дифференциальных уравнений для $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau). \tag{1.3.17}$$

Здесь введено обозначение

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau) = -\mathbf{u}_K'(\tau) + \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}_K(\tau) + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_K(\tau) + \mathbf{v}, \tau) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{v}, \tau),$$

а K выбрано таким образом, чтобы выполнялись неравенства $Kb > -r_i$ для любых $i = 1, \ldots, n$.

При помощи замены

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{w}$$

избавимся от неавтономности в линейной части (1.3.17), после чего (1.3.17) примет вид

$$\mathbf{w}' = \mathbf{R}\mathbf{w} + \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}, \tau), \tag{1.3.18}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}, \tau) = \exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\boldsymbol{\theta}(\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{w}, \tau).$$

Докажем, что система уравнений (1.3.18) имеет частное решение $\mathbf{w}(\tau)$, определенное на некотором бесконечном полуинтервале $[T, +\infty)$, где $T > 0$ достаточно велико, с асимптотикой $\mathbf{w}(\tau) = O(e^{-\Delta\tau})$ при $\tau \to +\infty$, где $\Delta = Kb + \delta$, а $\delta > 0$ — достаточно мало.

При сделанных предположениях можно утверждать, что $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}(\tau), \tau)$ имеет, вообще говоря, больший порядок убывания, чем $\mathbf{w}(\tau)$. Поскольку характеристический показатель матрицы $\mathbf{U}(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)$ равен нулю, то можно записать, что $\mathbf{v}(\tau) = O(e^{-(Kb+\delta/2)\tau})$.

Оценим $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau)$, воспользовавшись формулой конечных приращений:

$$\|\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau)\| \leqslant \|\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}, \tau)\| + \sup_{\zeta\in[0,1]} \|d_{\mathrm{v}}\boldsymbol{\theta}(\zeta\mathbf{v}, \tau)\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

Заметим, что каждый член ряда (1.3.13) имеет, очевидно, асимптотику $\mathbf{x}_k(\tau)e^{-k\beta\tau} = O(e^{-(kb+\sigma-\delta/2)\tau})$ для произвольного $\delta > 0$. Поэтому

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}, \tau) = -\mathbf{u}_K'(\tau) + \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}_K(\tau) + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_K(\tau), \tau) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_K(\tau), \tau).$$

Оценим

$$d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v},\tau) = d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_K(\tau)+\mathbf{v},\tau) + d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_K(\tau)+\mathbf{v},\tau).$$

По построению вектор-функции $\boldsymbol{\phi}$ ее порядок по $\mathbf{u}$ как минимум квадратичный. Поэтому $d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u},\tau) = O(\|\mathbf{u}\|)$ и асимптотика этой величины определяется асимптотикой первого члена ряда (1.3.13); в силу чего можно записать, что

$$d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_k(\tau)+\mathbf{v}(\tau),\tau) = O(e^{-(\beta-\sigma-\delta/2)\tau}) = O(e^{-(b+\sigma-\delta/2)\tau}).$$

По построению $\boldsymbol{\psi}$ имеем

$$d_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_K(\tau)+\mathbf{v}(\tau),\tau) = O(e^{-\beta\tau}) = O(e^{-(b+2\sigma)\tau}).$$

Последние асимптотические оценки равномерны по $\mathbf{v}$ в некоторой малой окрестности $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ в смысле стандартной нормы в $\mathbb{R}^n$. Поэтому

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}(\tau),\tau) = O(e^{-((K+1)b+\sigma-\delta/2)\tau})$$

при малых $\delta > 0$.

Ранее было показано,что характеристический показатель матрицы $\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)$ равен σ, т. е. $\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau) = O(e^{(\sigma+\delta/2)\tau)})$. Поэтому $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}(\tau),\tau)$ заведомо имеет асимптотику

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}(\tau),\tau) = O(e^{-((K+1)b-\delta)\tau}).$$

Поскольку вектор-функция $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w},\tau)$ непрерывна по совокупности своих аргументов, можно считать, что $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ осуществляет некоторое отображение $\boldsymbol{\Theta}$ окрестности $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ нуля нормированного пространства $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$ в себя, где:

$\mathfrak{H}_{0,\Delta}$ — банахово пространство вектор-функций $\mathbf{w}\colon [\mathrm{T},+\infty] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на замыкании полуинтервала $[\mathrm{T},+\infty)$, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{w}\|_{0,\Delta} = \sup_{[\mathrm{T},+\infty]} e^{\Delta\tau}\|\mathbf{w}(\tau)\|.$$

Рассмотрим также более узкое пространство $\mathfrak{H}_{1,\Delta}$:

$\mathfrak{H}_{1,\Delta}$ — банахово пространство вектор-функции $\mathbf{w}\colon [\mathrm{T},+\infty] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на замыкании полупространства $[\mathrm{T},+\infty)$ вместе со своими первыми производными, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{w}\|_{1,\Delta} = \sup_{[\mathrm{T},+\infty]} e^{\Delta\tau}(\|\mathbf{w}(\tau)\| + \|\mathbf{w}'(\tau)\|),$$

а также линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}\colon \mathfrak{H}_{1,\Delta} \to \mathfrak{H}_{0,\Delta}$, заданный по формуле

$$\mathbf{L} = \frac{d}{d\tau} - \mathbf{R}.$$

Лемма 1.3.4. *Оператор* $\mathbf{L}$ *имеет ограниченный обратный, норма которого не зависит от* T.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} - \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \in \mathfrak{H}_{0,\Delta} \tag{1.3.19}$$

и найдем единственное непрерывно дифференцируемое на замыкании полуинтервала $[\mathrm{T}, +\infty)$ частное решение этой системы с граничным условием $\mathbf{w}(+\infty) = \mathbf{0}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\mathbf{w}\|_{1,\Delta} \leqslant C\|\mathbf{h}\|_{0,\Delta}, \tag{1.3.20}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит ни от $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_{0,\Delta}$, ни от величины $\mathrm{T} > 0$. Нижняя грань всех таких $C > 0$ и будет являться нормой оператора $\mathbf{L}^{-1}$.

Искомое решение системы (1.3.19) примет тогда вид

$$\mathbf{w}(\tau) = -\exp(\mathbf{R}\tau) \int\limits_{\tau}^{+\infty} \exp(\mathbf{R}\xi)\mathbf{h}(\xi)d\xi.$$

Это решение удовлетворяет необходимым требованиям гладкости и имеет нужную асимптотику. В силу выполнения неравенств $\Delta > -r_i$ для любых i, несобственные интегралы в этих равенствах сходятся. Оценивая отдельно каждую координату, получим явное выражение для постоянной C в (1.3.20):

$$C = \max_i (1 + (|r_i| + 1)(\Delta + r_i)^{-1}).$$

Лемма доказана.

Перепишем систему дифференциальных уравнений (1.3.18) в виде

$$\mathbf{w} = \mathcal{F}(\mathbf{w}), \tag{1.3.21}$$

где $\mathcal{F} = \mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\Theta}$ отображает пространство $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$ в себя.

Докажем, что $\mathcal{F}$ является сжимающим в некоторой малой окрестности $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ нуля пространства $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$. Для этого заметим сперва, что при больших $\mathrm{T} > 0$ имеет место включение $\mathcal{F}(\mathfrak{U}_{0,\Delta}) \subset \mathfrak{U}_{0,\Delta}$.

Действительно, практически дословно повторяя рассуждения, использованные при оценке $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\tau, \mathbf{w}(\tau))$, получим оценку

$$\|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{w})\|_{0,\Delta} = O(e^{-b\mathrm{T}}) \text{ при } \mathrm{T} \to +\infty,$$

откуда следует, что существует такая постоянная $L > 0$, что

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{w})\|_{(0,\Delta)} \leqslant \|\mathcal{F}(\mathbf{w})\|_{(1,\Delta)} \leqslant LCe^{-b\mathrm{T}},$$

где C — норма оператора $\mathbf{L}^{-1}$.

Оценим разность

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{w}^{(1)}) - \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{w}^{(2)}) = \exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(1)}, \tau) - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(2)}, \tau))$$

для $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)} \in \mathfrak{U}_{0,\Delta}$.

Согласно формуле конечных приращений

$$\|\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(1)}, \tau) - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(2)}, \tau)\| \leqslant \sup_{\zeta \in [0,1]} \|d_{\mathrm{v}}\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(1)} + \zeta(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}), \tau)\| \, \|\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\|.$$

В силу малости в смысле стандартной в $\mathbb{R}^n$ нормы линейной комбинации $\mathbf{v}^{(1)} + \zeta(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)})$, выписанный в предыдущей формуле *supremum* является величиной, имеющей асимптотику $O(e^{-(b+\sigma-\delta/2)\tau})$ (см. рассуждения относительного порядка $d_{\mathrm{v}}\boldsymbol{\theta}$, приведенные выше). Норма матрицы $\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)$ является величиной порядка $O(e^{(\sigma+\delta/2)\tau})$. Наконец,

$$\|\mathbf{v}^{(2)}(\tau) - \mathbf{v}^{(1)}(\tau)\| \leqslant M(\tau)\|\mathbf{w}^{(2)}(\tau) - \mathbf{w}^{(1)}(\tau)\|,$$

где $M(\tau) = O(e^{\delta/2\, \tau})$ — некоторая зависящая от «времени» τ величина.

Поэтому можно утверждать, что существует такая не зависящая от τ константа $N > 0$, что

$$\|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{w}^{(1)}) - \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{w}^{(2)})\|_{0,\Delta} \leqslant Ne^{-(b-3\delta/2)\mathrm{T}}\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{0,\Delta},$$

откуда немедленно следует оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\mathbf{w}^{(1)}) - \mathcal{F}(\mathbf{w}^{(2)})\|_{0,\Delta} &\leqslant \|\mathcal{F}(\mathbf{w}^{(1)}) - \mathcal{F}(\mathbf{w}^{(2)})\|_{1,\Delta} \leqslant \\ &\leqslant CNe^{-(b-3\delta/2)\mathrm{T}}\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{0,\Delta}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при больших $\mathrm{T} > 0$ отображение $\mathcal{F}$ является сжимающим. Применяя к уравнению (1.3.21) принцип Каччиополли – Банаха [50], получим, что это уравнение имеет решение в $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$, т. е. отображение $\mathcal{F}$ имеет неподвижную точку. Поскольку множество значений $\mathcal{F}$ лежит, вообще говоря, в пространстве $\mathfrak{H}_{1,\Delta}$, решение (1.3.21) $\mathbf{w}(\tau)$ принадлежит классу $\mathbf{C}^1[\mathrm{T}, +\infty)$, т. е. является решением системы дифференциальных уравнений (1.3.18) с асимптотикой $\mathbf{w}(\tau) = O(e^{-\Delta\tau})$. Так как правые части (1.3.18) являются бесконечно дифференцируемыми вектор-функциями, то $\mathbf{w}(\tau) \in \mathbf{C}^\infty[\mathrm{T}, +\infty)$. Возвращаясь к переменной $\mathbf{v}$, получим, что $\mathbf{w}(\tau) = o(e^{-Kb\tau})$.

Лемма 1.3.3 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1.3.2 теперь нужно вернуться к исходным переменным $\mathbf{x}, t$. Итак, исходная система уравнений (1.3.2) имеет бесконечно дифференцируемое решение с требуемой асимптотикой.

Теорема доказана.

Только что доказанная теорема 1.3.2 гарантирует существование, вообще говоря, только одного решения с интересующей нас асимптотикой. Это решение может быть построено конструктивно в виде рядов, для нахождения коэффициентов которых на каждом шаге необходимо решать линейную неавтономную систему дифференциальных уравнений. Несмотря на это очевидное преимущество, эта теорема не позволяет даже оценить «мощность» множества таких решений, хотя алгоритм построения рядов (1.3.10) показывает, что искомое решение может зависеть от некоторого количества свободных параметров. Ниже мы установим результат, родственный теореме Адамара–Перрона [85] и гарантирующий существование некоторого l-параметрического семейства решений с требуемой асимптотикой.

Теорема 1.3.3. *Пусть укороченная система уравнений* (1.3.4) *имеет частное решение вида* (1.3.1) *и пусть при $\beta > 0$ полный спектр системы* (1.3.6)*, а при $\beta < 0$ полный спектр системы* (1.3.8)*, содержит l отрицательных характеристических показателей, а остальные положительны или равны нулю, а мера неправильности σ соответствующих систем удовлетворяет неравенству*

$$\sigma < \min({}^{|\beta|}\!/_2, -R), \tag{1.3.22}$$

где $R = \max(r_i : r_i < 0)$.

Тогда (1.3.2) *имеет l-параметрическое семейство частных решений вида*

$$\mathbf{x}(\mathbf{c}, t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma(\gamma t) + o(1)) \quad \textit{при} \quad t^\chi \to \gamma \times \infty,$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^l$ — вектор параметров.

Доказательство идейно во многом напоминает доказательство предыдущей теоремы. За исходную систему мы возьмем (1.3.12) и, как при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим только положительно полуквазиоднородный случай ($\chi = +1$). Фактически нам нужно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.3.5. *Пусть в правой части* (1.3.12) *параметр* β *положителен, полный спектр системы* (1.3.6) *содержит* l *отрицательных характеристических показателей, а остальные положительны или равны нулю, а мера неправильности* (1.3.6) σ *удовлетворяет неравенству* (1.3.22)*. Тогда* (1.3.12) *имеет* l*-параметрическое семейство решений, стремящихся к* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *при* $\tau \to +\infty$.

Доказательство. Сделаем замену зависимой и независимой переменных

$$\mathbf{u}(\tau) = \varepsilon\mathbf{v}(\tau), \quad \tau_\varepsilon = \tau + 2\beta^{-1}\ln\varepsilon,$$

после которой система (1.3.12) примет вид

$$\mathbf{v}' = \mathbf{K}_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\mathbf{v} + \varepsilon(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon)), \tag{1.3.23}$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторый малый параметр, штрих означает теперь производную по «новому времени» τ_ε, а входящие в правую часть (1.3.23) вектор-функции $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}$ выражаются через прежние следующим образом

$$\begin{matrix}\mathbf{\Phi}\\ \mathbf{\Psi}\end{matrix}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^{-2}\begin{matrix}\mathbf{\Phi}\\ \mathbf{\Psi}\end{matrix}(\varepsilon\mathbf{v}, \tau + 2\beta^{-1}\ln\varepsilon).$$

Через $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon)$ обозначим сумму $\mathbf{\Phi}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon) + \mathbf{\Psi}(\mathbf{v}, \tau_\varepsilon, \varepsilon)$. Очевидно, что эта вектор-функция непрерывна по ε.

Матрица линейной части (1.3.23) выражается через матрицу Ковалевской следующим образом

$$\mathbf{K}_\varepsilon(\tau_\varepsilon) = \mathbf{K}(\tau_\varepsilon - 2\beta^{-1}\ln\varepsilon).$$

Легко видеть, что матрица $\mathbf{K}_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$ порождает линейную систему с теми же асимптотическими свойствами, что и у системы (1.3.6). Ниже для краткости записи мы будем опускать индекс ε у переменной τ_ε.

При помощи замены переменных

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}_\varepsilon(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{w},$$

где $\mathbf{U}_\varepsilon(\tau)$ — фундаментальная матрица системы линейных уравнений с матрицей $\mathbf{K}_\varepsilon(\tau)$, избавимся от неавтономности в линейной части. В результате получим систему, близкую к (1.3.18)

$$\mathbf{w}' = \mathbf{R}\mathbf{w} + \varepsilon\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}, \tau, \varepsilon), \tag{1.3.24}$$

где
$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w},\tau,\varepsilon)=\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}_\varepsilon^{-1}(\tau)\boldsymbol{\theta}(\mathbf{U}_\varepsilon(\tau)\exp(-\mathbf{R}\tau)\mathbf{w},\tau,\varepsilon).$$

Фазовое пространство системы (1.3.24) разложимо в прямую сумму
$$\mathbb{R}^n=E^{(s)}\oplus E^{(u,c)}$$
подпространств, инвариантных относительно действия оператора $\mathbf{R}$, таких, что спектр сужения $\mathbf{R}|_{E^{(s)}}=\mathbf{R}^{(s)}$ отрицателен, а спектр $\mathbf{R}|_{E^{(u,c)}}=\mathbf{R}^{(u,c)}$ положителен и, возможно, содержит нуль. Проекции $\mathbf{w}$ и $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ на подпространства $E^{(s)}$ и $E^{(u,c)}$ обозначим соответственно $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(u,c)}$ и $\mathbf{w}^{(s)},\mathbf{w}^{(u,c)}$.

Систему дифференциальных уравнений (1.3.24) запишем в виде системы интегральных уравнений
$$\begin{aligned}\mathbf{w}^{(s)}&=\varepsilon\exp(\mathbf{R}^{(s)}\tau)\left(\mathbf{c}+\int\limits_0^\tau\exp(-\mathbf{R}^{(s)}\xi)\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}(\mathbf{w},\xi,\varepsilon)\,d\xi\right)\\ \mathbf{w}^{(u,c)}&=-\varepsilon\exp(\mathbf{R}^{(u,c)}\tau)\left(\int\limits_\tau^\infty\exp(-\mathbf{R}^{(u,c)}\xi)\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(u,c)}(\mathbf{w},\xi,\varepsilon)\,d\xi\right),\end{aligned}\tag{1.3.25}$$
где $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^l=E^{(s)}$, $\|\mathbf{c}\|\leqslant 1$ — вектор свободных параметров.

Из (1.3.25) видно, что искомое решение $\mathbf{w}(\tau)$ будет удовлетворять условиям $\mathbf{w}^{(s)}(0)=\mathbf{c}$, $\mathbf{w}^{(u,c)}(+\infty)=\mathbf{0}$. Мы будем требовать, кроме того, чтобы $\mathbf{w}(\tau)=o(1)$ при $\tau\to+\infty$.

Задачу поиска решений (1.3.25) можно рассматривать как некоторую задачу о нахождении неподвижной точки
$$\mathbf{w}=\mathfrak{q}_\varepsilon(\mathbf{w}),\tag{1.3.26}$$
где $\mathfrak{q}_\varepsilon$ — отображение некоторой малой окрестности $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ рассмотренного выше пространства $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$ в себя, где теперь $\Delta=\sigma+2\delta$, $\delta>0$ — достаточно мало и вектор-функции $\mathbf{w}(\tau)$ определены на замыкании бесконечного полуинтервала $[0,+\infty)$.

Снова обозначим через $\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon$ отображение $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ в пространство $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$, порождаемое вектор-функцией $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w},\tau,\varepsilon)$.

Поскольку $\mathbf{w}(\tau)=O(e^{-(\sigma+2\delta)\tau})$ при $\tau\to+\infty$, то очевидно, что $\mathbf{v}(\tau)=$ $=O(e^{-(\sigma+{}^{3\delta}/_2)\tau})$. Откуда
$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v},\tau,\varepsilon)=O(e^{-(2\sigma+3\delta)\tau})\quad\text{и}\quad\boldsymbol{\psi}(\mathbf{v},\tau,\varepsilon)=O(e^{-\beta\tau}).$$

В силу неравенства (1.3.22), можно подобрать δ настолько малым, что будет имеет место оценка

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v},\tau,\varepsilon) = O(e^{-(2\sigma+3\delta)\tau}).$$

Поэтому можно воспользоваться фактически полученными ранее асимптотическими оценками нормы матрицы $\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}_\varepsilon^{-1}(\tau)$:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v},\tau,\varepsilon) = O(e^{-(\sigma+{}^{5\delta}\!/_{2})\tau}).$$

Эти оценки являются равномерными по $\varepsilon, \mathbf{w}$ для малых ε и $\mathbf{w}$, лежащих в некоторой малой окрестности $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ пространства $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$. Поэтому существует такая постоянная $L > 0$, что

$$\|\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon(\mathbf{w})\|_{0,\Delta} \leqslant L.$$

Отображение $\mathfrak{q}_\varepsilon$ можно переписать в виде $\mathfrak{q}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{P}\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon$, где $\mathbf{P}$ — некоторое линейное отображение на пространстве $\mathfrak{H}_{0,\Delta}$, порожденное интегральным преобразованием в (1.3.25), примененным к $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v},\tau_\varepsilon,\varepsilon)$.

Лемма 1.3.6. *Отображение* $\mathbf{P}$ *непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две произвольные вектор-функции $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)} \in \mathfrak{H}_{0,\Delta}$ и положим $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{P}\mathbf{h}^{(2)}$. В силу выполнения неравенства (1.3.22) можно подобрать малое δ так, чтобы выполнялось неравенство $\Delta = \sigma + 2\delta < -R$. Поэтому

$$\left|(w^{(1)})^i(\tau) - (w^{(2)})^i(\tau)\right| \leqslant \left(e^{r_i\tau}\int\limits_0^\tau e^{-(r_i+\Delta)\xi}\,d\xi\right)\left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\,\Delta} =$$
$$= \left(-(\Delta + r_i)^{-1}\,e^{\Delta\tau}\left(1 - e^{(r_i+\Delta)\tau}\right)\right)\left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\Delta} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\Delta\tau}|\Delta + r_i|^{-1}\left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\Delta}$$

для i-х компонент, отвечающих подпространству $E^{(s)}$.

Тогда для компонент, отвечающих подпространству $E^{(u,c)}$, будем иметь

$$\left|(w^{(1)})^i(\tau) - (w^{(2)})^i(\tau)\right| \leqslant \left(e^{r_i\tau}\int\limits_\tau^{+\infty} e^{-(r_i+\Delta)\xi}\,d\xi\right)\left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\Delta} =$$
$$= e^{-\Delta\tau}(\Delta + r_i)^{-1}\left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\Delta}.$$

Из этих неравенств следует, что существует такая постоянная $C > 0$, что
$$\left\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\right\|_{0,\Delta} \leqslant C \left\|\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(2)}\right\|_{0,\Delta}.$$

Лемма доказана.

Следовательно (т. к. $\exp(\mathbf{R}^{(s)}\tau)\mathbf{c} \in \mathfrak{H}_{0,\Delta}$), композиция $\mathbf{P\Theta}_\varepsilon$ ограничена на $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$. Поскольку отображение $\mathfrak{q}_\varepsilon$ имеет вид $\mathfrak{q}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{P\Theta}_\varepsilon$, подходящим подбором ε можно добиться, чтобы $\mathfrak{q}_\varepsilon(\mathfrak{U}_{0,\Delta}) \subset \mathfrak{U}_{0,\Delta}$.

Докажем сжимаемость $\mathfrak{q}_\varepsilon$ на $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$ при малых $\varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольные функции $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in \mathfrak{U}_{0,\Delta}$ и оценим разность нормы
$$\mathbf{\Theta}_\varepsilon(\mathbf{w}^{(1)}) - \mathbf{\Theta}(\mathbf{w}^{(2)}) \leqslant \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}^{(1)}, \tau, \varepsilon) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}^{(2)}, \tau, \varepsilon).$$

Воспользуемся формулой конечных приращений
$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(1)}, \tau, \varepsilon) - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(2)}, \tau, \varepsilon)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\xi\in[0,1]} \left\|d_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}^{(1)} + \zeta(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}), \tau, \varepsilon)\right\| \left\|\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\right\|.\end{aligned}$$

В силу малости в смысле стандартной в $\mathbb{R}^n$ нормы линейной комбинации $\mathbf{v}^{(1)} + \zeta(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)})$ и выполнения неравенства (1.3.22), верхняя грань нормы матрицы $d_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\theta}$ имеет асимптоту $O(e^{-(\sigma+3\delta/2)\tau})$. Норма матрицы $\exp(\mathbf{R}\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)$ является величиной порядка $O(e^{(\sigma+\delta/2)\tau})$, вследствие чего, учитывая разницу между асимптотиками величин $\mathbf{v}(\tau)$ и $\mathbf{w}(\tau)$, можно записать
$$\|\mathbf{\Theta}_\varepsilon(\mathbf{w}^{(1)}) - \mathbf{\Theta}_\varepsilon(\mathbf{w}^{(2)})\|_{0,\Delta} \leqslant N\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{0,\Delta},$$

где $N > 0$ — некоторая не зависящая от $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in \mathfrak{U}_{0,\Delta}$ постоянная. Отсюда сразу следует оценка
$$\|\mathcal{F}_\varepsilon(\mathbf{w}^{(1)}) - \mathcal{F}_\varepsilon(\mathbf{w}^{(2)})\|_{0,\Delta} \leqslant \varepsilon CN\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|_{0,\Delta}.$$

Подходящим подбором $\varepsilon > 0$ можно добиться, чтобы отображение $\mathfrak{q}_\varepsilon$ было сжимающим. Из принципа Каччиополли–Банаха [85], примененного в уравнению (1.3.26), получаем, что это уравнение имеет решение в $\mathfrak{U}_{0,\Delta}$, т. е. отображение $\mathcal{F}_\varepsilon$ имеет неподвижную точку, а система интегральных уравнений (1.3.25) — решение с асимптотикой $\mathbf{w}(\tau) = O(e^{-\Delta\tau})$. Поскольку оператор $\mathbf{P}$ повышает, вообще говоря, порядок гладкости на единицу, решение (1.3.26) $\mathbf{w}(\tau)$ принадлежит классу $\mathbf{C}^1[0, +\infty)$, т. е. является решением системы дифференциальных уравнений (1.3.24). При этом речь идет уже не об отдельном решении, а о семействе решений, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$.

Лемма 1.3.5 доказана.

Возвращаясь к исходным переменным $\mathbf{x}, t$, получим, что исходная система уравнений (1.3.2) имеет l-параметрическое семейство частных решений с требуемой асимптотикой.

Теорема 1.3.3 доказана.

Завершая этот параграф, сделаем ряд замечаний.

Замечание 1.3.1. Классическая теорема Адамара – Перрона [85] утверждает, что экспоненциальные траектории «заметают» некоторое множество, имеющее в окрестности особой точки структуру гладкого многообразия. Даже в автономном случае множество решений с обобщенно степенной асимптотикой, существование которых гарантируется только что доказанной теоремой, гладкого многообразия не образует.

Замечание 1.3.2. Доказывая предыдущую теорему, мы фактически показали, что в новом «логарифмическом» времени τ «возмущение» $\mathbf{u}(\tau)$ порождающего решения (1.3.1) укороченной системы имеет асимптотику $\mathbf{u}(\tau) = O(e^{-(\sigma+{}^{3\delta}\!/_2)\tau})$ для произвольного малого $\delta > 0$, откуда формально следует, что с уменьшением меры неправильности σ эта асимптотика ухудшается, и что в случае правильности системы первого приближения (1.3.6) можно гарантировать лишь весьма скромную оценку $O(e^{-{}^{3\delta}\!/_2)\tau})$ для $\mathbf{u}(\tau)$. Тем не менее, проведя весьма похожее доказательство для случая правильной системы (1.3.6), можно показать, что $\mathbf{u}(\tau)$ имеет асимптотику более высокого порядка, а именно $O(e^{-(\beta-\delta)\tau})$.

Замечание 1.3.3. Может случиться так, что некоторые компоненты порождающего решения $\mathbf{x}^\gamma(t)$ окажутся равными нулю. Тогда в этих компонентах главные члены асимптотики будут определяться в автономном случае собственными значениями матрицы Ковалевской. Мы столкнемся с подобной ситуацией при рассмотрении примера 1.4.5 следующего параграфа.

Замечание 1.3.4. Мы с самого начала этого параграфа предполагали, что правые части рассматриваемой системы (1.3.2) являются полуквазиоднородными векторными полями, если входящее в них время рассматривать в качестве параметра (т. е. t в правых частях (1.3.2) под действием группы (1.1.11) не преобразуется). Однако, почти все полученные результаты остаются справедливыми и в более общей ситуации. Пусть правые части (1.3.2) имеют следующий вид:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}^{**}(\mathbf{x}, t),$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t)$ — квазиоднородное векторное поле, $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)$ под действием группы (1.1.11) превращается, как и прежде, в степенной ряд относительно μ^β без свободного члена, а $\mathbf{f}^{**}(\mathbf{x}, t)$ становится величиной порядка $O(\mu^{M\beta})$ для некоторого достаточно большого M (время t в правых частях по-прежнему не преобразуется). При этом в результате преобразования $\mathbf{f}^{**}(\mathbf{x},t)$ может зависеть от μ достаточно сложным образом, например содержать логарифмы, а также периодические или квазипериодические функции от μ. Наличие слагаемого $\mathbf{f}^{**}(\mathbf{x},t)$ может помешать лишь достроить до конца формальный ряд (1.3.10), однако это не препятствует доказательству существования частного решения исходной системы с требуемой асимптотикой.

4. Примеры

Применим разработанную в предыдущих параграфах методику к конкретным задачам.

Пример 1.4.1. Следуя работе [110], исследуем вопрос об устойчивости особой точки и о существовании асимптотических решений многомерной гладкой системы дифференциальных уравнений, линейная часть которой представляет собой жорданову клетку с нулевой диагональю (задача Ляпунова).

Эту систему уравнений запишем в следующем виде:

$$\dot{x}^i = x^{i+1} + \ldots, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \dot{x}^n = a(x^1)^2 + \ldots, \tag{1.4.1}$$

где многоточия означают совокупность нелинейных членов, из которых в последнем уравнении оставлен лишь моном $a(x^1)^2$. Легко заметить, что выделенная система является квазиоднородной в смысле определения 1.1.2 степени $\mathrm{q} = 2$ с показателями квазиоднородности, определяемыми целочисленной диагональной матрицей $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(n, n+1, \ldots, 2n-1)$. Можно показать, что рассматриваемая квазиоднородная система порождена положительными гранями многогранников Ньютона системы (1.4.1), поэтому система (1.4.1) положительно полуквазиоднородна $(\chi = +1)$. Если коэффициент $a \neq 0$, то квазиоднородное укорочение имеет частное асимптотическое решение

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\mathbf{S}}\mathbf{x}_0^-, \quad \text{или} \quad x^{-i}(t) = \frac{x_0^{-i}}{(-t)^{n+i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$x_0^{-i} = \frac{(2n-1)!(n+i-2)!}{a((n-1)!)^2}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда следует, что полная система имеет частное асимптотическое решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$. Этот факт означает неустойчивость рассматриваемой особой точки. Для двумерной системы $(n = 2)$ полученный результат представляет собой теорему Ляпунова [81].

Можно показать, что укороченная система имеет также и «положительное» частное решение $\mathbf{x}^+(t) = t^{-\mathbf{S}}\mathbf{x}_0^+$, что влечет за собой также существование асимптотического решения полной системы, входящего в особую точку при $t \to +\infty$. Это решение укороченной системы может быть найдено непосредственно. С другой стороны его существование вытекает из пункта а) леммы 1.1.1. Поскольку правые части укороченной системы инвариантны относительно замены $x^1 \mapsto -x^1$, то степень гауссова отображения Γ четна, поэтому Γ имеет как неподвижную, так и антиподально неподвижную точку.

Пусть в системе (1.4.1) имеет место дополнительное вырождение ($a = 0$). Двумерный случай подробно исследован Ляпуновым [81], поэтому остановимся на случае $n \geqslant 3$.

Перепишем систему (1.4.1) в следующем виде

$$\begin{gathered} \dot{x}^i = x^{i+1} + \ldots, \quad i = 1, \ldots, n-2 \\ \dot{x}^{n-1} = x^n + b(x^1)^2 + \ldots, \quad \dot{x}^n = 2cx^1x^2 + \ldots \end{gathered} \tag{1.4.2}$$

Здесь многоточия также означают совокупность нелинейных членов, из которых в предпоследнем уравнении выделен моном $b(x^1)^2$, а в последнем — $2cx^1x^2$. Выделенная система является квазиоднородной степени $\mathrm{q} = 2$ с матрицей показателей $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(n-1, \ldots, 2n-2)$. Если $b + c \neq 0$, то эта система имеет частное асимптотическое решение вида

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\mathbf{S}}\mathbf{x}_0^-, \quad \text{или} \quad x^{-i}(t) = \frac{x_0^{-i}}{(-t)^{n+i-2}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$x_0^{-i} = \frac{(2n-3)!(n+i-3)!}{(b+c)((n-2)!)^2}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$x_0^{-n} = c\left(\frac{(2n-3)!}{(b+c)(n-2)!}\right)^2.$$

Легко показать, что квазиоднородное укорочение выделено положительными гранями многогранника Ньютона системы (1.4.2), поэтому (1.4.2) имеет асимптотическое решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$, что гарантирует неустойчивость. Можно показать также существование решения, стремящегося к $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что в обоих случаях асимптотические при $t \to +\infty$ частные решения можно записать в следующем виде

$$\mathbf{x}(t) = t^{-\mathbf{S}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(\ln t) t^{-k}.$$

Здесь $\mathbf{x}_k(\cdot)$ — некоторые вектор-многочлены.

Пример 1.4.2. Так называемая логистическая система уравнений дает простейший пример ситуации, когда $\chi = -1$:

$$\dot{N}^i = N^i(k_i + b_i^{-1} \sum_{p=1}^{n} a_p^i N^p), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.4.3}$$

При помощи системы (1.4.3) можно описывать взаимодействие популяций различных видов в некоторой экосистеме. Тогда $N^i(t)$ — число особей в популяции i-го вида в момент времени t, $(a_p^i)_{i,p=1}^n$ — постоянная матрица (если $a_p^i > 0$, то это означает, что i-й вид увеличивается за счет p-го вида, в противном же случае i-й вид сокращается за счет p-го вида), k_i — разность между рождаемостью и смертностью i-го вида в предположении, что он предоставлен самому себе, $b_i > 0$ — параметры, характеризующие тот факт, что воспроизводство одного «хищника» сопряжено с исчезновением более чем одной жертвы. Реально системы типа (1.4.3) имеет смысл рассматривать только в первом октанте ($N^i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n$). Впервые свойства решений системы (1.4.3) рассматривал Вольтерра [32]. Позднее система (1.4.3) использовалась при моделировании других важных прикладных задач. Первоначально предполагалось [32], что матрица (a_p^i) кососимметрична. К настоящему времени существуют другие модели, где это требование снято. Например, в работе [173], где система (1.4.3) применялась для исследования динамики развития конкурирующих отраслей производства (job systems), предполагалось, что элементы $a_p^i > 0$, $i, p = 1, \ldots, n$, $i \neq p$, а диагональные элементы отрицательны ($a_i^i < 0$).

Отбросив в (1.4.3) линейные члены, получим квадратичное однородное укорочение ($\mathbf{S} = \mathbf{E}, \mathrm{q} = 2$)

$$\dot{N}^i = b_i^{-1} N^i \sum_{p=1}^{n} a_p^i N^p, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4.4}$$

выделенное, очевидно, отрицательными гранями многогранника Ньютона системы (1.4.3).

Система (1.4.4) имеет частное решение типа луча

$$\mathbf{N}^+(t) = t^{-1}\mathbf{N}_0^+, \quad \mathbf{N} = (N^1, \ldots, N^n),$$

если разрешима относительно $\mathbf{N}_0^+ = (N_0^{+1}, \ldots, N_0^{+n})$ алгебраическая система линейных уравнений

$$\sum_{p=1}^{n} a_p^i N_0^{+p} = -b_i.$$

Тогда полная система уравнений имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\mathbf{N}(t) = t^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{N}_k(\ln t) t^k.$$

Для того, чтобы данное частное решение было положительным, достаточно, чтобы было положительным решение указанной линейной системы.

Найденное частное решение обладает асимптотикой $\mathbf{N}(t) = O(t^{-1})$ при $t \to +0$. Поскольку правая часть выделенного укорочения инвариантна относительно замены $\mathbf{N} \mapsto -\mathbf{N}$, существует также частное решение с асимптотикой $\mathbf{N}(t) = O((-t)^{-1})$ при $t \to -0$.

Пример 1.4.3. Система Ресслера [183]. Найдем частные решения с неэкспоненциальной асимптотикой нелинейной системы, у которой ранее был численно обнаружен хаотический аттрактор, и покажем, что в соответствующих разложениях решений содержатся логарифмические члены, т. е. данная система не выдерживает тест Пенлеве.

Эта система третьего порядка имеет вид

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = a + xz - bz, \tag{1.4.5}$$

где a, b — некоторые действительные параметры.

Существует много вариантов выделения квазиоднородного укорочения системы (1.4.5), а следовательно и построения неэкспоненциальных асимптотик решений полной системы.

Подвергаем систему (1.4.5) действию квазиоднородной группы растяжений типа (1.1.7):

$$x \mapsto \mu^{g_x} x, \quad y \mapsto \mu^{g_y} y, \quad z \mapsto \mu^{g_z} z, \quad t \mapsto \mu^{-1} t,$$

После этого система (1.4.5) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\mu^{g_z - g_x - 1} y - \mu^{g_z - g_x - 1} z, \\
\dot{y} &= \mu^{g_x - g_y - 1} x + a\mu^{-1} z, \\
\dot{z} &= a\mu^{-g_z - 1} + \mu^{g_x - 1} xz - b\mu^{-1} z.
\end{aligned}$$

Тройка чисел g_x, g_y, g_z — элементы диагональной матрицы $\mathbf{G}$. Очевидно, что $\chi = -1$.

Ограничимся случаем, когда элементы матрицы $\mathbf{G}$ — целые. Для того, чтобы сохранить в квазиоднородком укорочении единственный нелинейный член, следует положить $g_x = 1$. Тогда возможными значениями других двух показателей будут: $g_y \in \{0, 1, 2\}$, $g_z \in \{-1, 0, 1, 2\}$. С учетом всех принципиально возможных комбинаций перечислим нетривиальные частные решения типа «луча»:

а) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0, -1)$, $x = 0,\ y = \eta,\ z = at$,

б) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0, 2)$, $x = 0,\ y = \eta,\ z = 0$,

в) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$, $x = 0,\ y = 0,\ z = at$,

г) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$, $x = 0,\ y = 0,\ z = \zeta$,

д) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$, $x = -2t^{-1},\ y = 0,\ z = -2t^{-2}$,

е) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 2, -1)$, $x = 0,\ y = 0,\ z = at$,

ж) $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$, $x = -2t^{-1},\ y = 0,\ z = -2t^{-2}$.

Случай б) и г) соответствуют частным решениям полной системы (1.4.5), представимым в виде рядов

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k, \quad z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k t^k,$$

где коэффициенты x_k, y_k, z_k не зависят от $\ln t$ и являются полиномиальными функциями трех свободных параметров ξ, η, ζ, в качестве которых можно взять $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$.

Случаи а), в) и е) соответствуют частным решениям, являющимся подсемейством рассмотренного семейства при $\zeta = 0$, что влечет за собой равенство $z_1 = a$.

Можно также утверждать, что построенные ряды сходятся при любых конечных ξ, η, ζ в некоторой малой комплексной окрестности $t = 0$. Это утверждение является простым следствием теоремы Коши о голоморфной зависимости решения от времени и начальных данных (см., например, [52]).

Случаи д) и ж) дают частное решение, имеющее асимптотическое разложение

$$x(t) = t^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\ln t) t^k,$$

$$y(t) = t^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\ln t) t^k,$$

$$z(t) = t^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(\ln t) t^k,$$

где $x_0 = -2$, $y_0 = 0$, $z_0 = -2$, причем логарифмические члены в этих разложениях неустранимы.

Это означает, что система Resслера не обладает свойством Пенлеве, что является косвенным подтверждением ее хаотичности.

Пример 1.4.4. Следуя [69], рассмотрим задачу Хилла [168]. Она описывается гамильтоновой системой уравнений с функцией Гамильтона

$$H = {}^1\!/_2(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x - x^2 + {}^1\!/_2 y^2 - (x^2 + y^2)^{-1/2}. \tag{1.4.6}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= p_y + 2x - x(x^2 + y^2)^{-3/2}, \quad \dot{x} = p_x + y, \\ \dot{p}_y &= -p_x - y - y(x^2 + y^2)^{-3/2}, \quad \dot{y} = p_y - x \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

описывают плоское движение спутника малой массы, например Луны, в поле притяжения двух тел, масса одного из которых мала по сравнению с массой другого, например Земли и Солнца. Подробную постановку задачи можно найти в монографии [41]. Интересно отметить, что, как показали Спириг и Вальдфогель [191], уравнения (1.4.7) описывают также в некотором приближении взаимное движение двух спутников массивного притягивающего тела по близким орбитам.

Введя новую вспомогательную переменную $s = (x^2 + y^2)^{-1/2}$, превратим (1.4.7) в полиномиальную систему дифференциальных уравнений пятого порядка.

$$\begin{gathered} \dot{p}_x = p_y + 2x - xs^3, \quad \dot{x} = p_x + y, \\ \dot{p}_y = -p_x - y - ys^3, \quad \dot{y} = p_y - x, \\ \dot{s} = -xp_x s^3 - yp_y s^3. \end{gathered} \tag{1.4.8}$$

Введя для фазовых переменных квазиоднородную шкалу

$$\begin{gathered} p_x \mapsto \mu^{g_{p_x}} p_x, \quad x \mapsto \mu^{g_x}, \quad p_y \mapsto \mu^{g_{p_y}} p_y, \\ y \mapsto \mu^{g_y}, \quad s \mapsto \mu^{g_s} s, \quad t \mapsto \mu^{-1} t, \end{gathered}$$

найдем всевозможные укорочения.

Если выбрать

$$g_{p_x} = -{}^2\!/_3, \quad g_x = -{}^5\!/_3, \quad g_{p_y} = {}^1\!/_3, \quad g_y = -{}^2\!/_3, \quad g_s = {}^2\!/_3,$$

то под действием указанного преобразования система уравнений (1.4.8) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\dot p_x = p_y + 2\mu^{-2}x - xs^3, && \dot x = p_x + y,\\
&\dot p_y = -\mu^{-2}p_x - \mu^{-2}y - ys^3, && \dot y = p_y - \mu^{-2}x,\\
&\dot s = -\mu^{-2}xp_xs^3 - yp_ys^3.
\end{aligned} \tag{1.4.9}
$$

Отсюда видно, что относительно введенной «шкалы» система (1.4.8) является отрицательно полуквазиоднородной. Положив $\mu = \infty$, получим укороченную квазиоднородную систему, имеющую частное решение

$$p_x = p_{x_0}t^{2/3}, \quad x = x_0t^{5/3}, \quad p_y = p_{y_0}t^{-1/3}, \quad y = y_0t^{2/3}, \quad s = s_0t^{-2/3},$$

где

$$p_{x_0} = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad x_0 = \pm\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3},$$
$$p_{y_0} = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad y_0 = \pm\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad s_0 = \left(\frac{2}{9}\right)^{1/3}.$$

И соответствии с теоремой 1.1.2, гамильтонова система уравнений с гамильтонианом (1.4.6) имеет частное решение, допускающее асимптотическое разложение

$$
\begin{aligned}
&p_x(t) = t^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty}p_{x_k}t^{k/3}, && x(t) = t^{5/3}\sum_{k=0}^{\infty}x_kt^{k/3},\\
&p_y(t) = t^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}p_{y_k}t^{k/3}, && y(t) = t^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty}y_kt^{k/3}.
\end{aligned} \tag{1.4.10}
$$

Если же выбрать

$$g_{p_x} = 1/3, \quad g_x = -2/3, \quad g_{p_y} = -2/3, \quad g_y = -5/3, \quad g_s = 2/3,$$

то (1.4.8) превратится в

$$
\begin{aligned}
&\dot p_x = \mu^{-2}p_y + 2\mu^{-2}x - xs^3, && \dot x = p_x + \mu^{-2}y,\\
&\dot p_y = -p_x - \mu^{-2}y - ys^3, && \dot y = p_y - x,\\
&\dot s = -xp_xs^3 - \mu^{-2}yp_ys^3.
\end{aligned} \tag{1.4.11}
$$

При $\mu = \infty$ получим квазиоднородную укороченную систему, которая имеет частное решение

$$p_x = p_{x_0} t^{-1/3}, \quad x = x_0 t^{2/3}, \quad p_y = p_{y_0} t^{2/3}, \quad y = y_0 t^{5/3}, \quad s = s_0 t^{-2/3},$$

где теперь

$$p_{x_0} = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad x_0 = \pm\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3},$$
$$p_{y_0} = \mp\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad y_0 = \mp\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \quad s_0 = \left(\frac{2}{9}\right)^{1/3}.$$

Следовательно, полная система уравнений (1.4.7) имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned} p_x(t) &= t^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty} p_{x_k} t^{k/3}, \quad & x(t) &= t^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^{k/3}, \\ p_y(t) &= t^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty} p_{y_k} t^{k/3}, \quad & y(t) &= t^{5/3}\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^{k/3}. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Применение в общем виде алгоритма построения формальных асимптотик вида (1.1.14), изложенного в § 1, предусматривает полиномиальную зависимость коэффициентов разложений (1.4.10) и (1.4.12) от $\ln t$. Однако простые, хотя и утомительные вычисления показывают, что p_{x_k}, x_k , p_{y_k}, y_k постоянны. Происходит это по следующим причинам. Поскольку система (1.4.8) отрицательно полуквазиоднородна, то логарифмы могут появляться на шагах, номер k которых «резонирует» с положительными собственными значениями матрицы Ковалевской, т. е. $-k\beta = \rho_i$, где ρ_i — некоторый корень характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0.$$

Показатели Ковалевской во всех рассматриваемых случаях следующие:

$$\rho_{1,2} = -1, \quad \rho_{3,4} = -4/3, \quad \rho_5 = 2/3,$$

при этом $\beta = -1/3$. Это означает, что логарифмы могут появиться не ранее, чем на втором шаге. Но из уравнений (1.4.9) и (1.4.11) видно, что ненулевые свободные члены $\mathbf{\Phi}_k$ в уравнениях для определения коэффициентов появятся лишь на шестом шаге.

Траектории задачи Хилла, отвечающие частным решениям (1.4.7) с асимптотическими разложениями (1.4.10) и (1.4.12) являются так называемыми траекториями столкновений. На этих траекториях происходит столкновение меньшего притягивающего тела и спутника (Земли и Луны) за конечное время (относительно выбранного начала отсчета при $t \to 0$). Алгоритм, изложенный в § 1, позволяет рекуррентно находить коэффициенты этих разложений и, следовательно, конструктивно строить траектории столкновений в масштабе реального времени. До сих пор при рассмотрении проблемы столкновений в задаче Хилла уравнения движения подвергали регуляризующим заменам переменных, введенным Биркгофом [146]. Современная трактовка этой проблемы дана в монографии [8].

Пример 1.4.5. Обобщенная система Хенона–Хейлеса [166]. Этот пример детально рассмотрен в статьях [153, 152].

Рассмотрим движение механической системы с гамильтонианом

$$H = {}^1\!/_2(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + Dx^2y - \frac{C}{3}y^3. \tag{1.4.13}$$

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\dot p_x = -x - 2Dxy, \quad \dot x = p_x, \quad \dot p_y = -y - Dx^2 + Cy^2, \quad \dot y = p_y. \tag{1.4.14}$$

Подвергнем систему (1.4.14) естественной квазиоднородной группе преобразований

$$p_x \mapsto \mu^{g_x+1}p_x, \quad x \mapsto \mu^{g_x}, \quad p_y \mapsto \mu^{g_y+1}p_y, \quad y \mapsto \mu^{g_y}, \quad t \mapsto \mu^{-1}t,$$

после чего система (1.4.19) примет вид

$$\begin{aligned} &\dot p_x = -\mu^{-1}x - 2\mu^{g_y-2}Dxy, && \dot x = p_x,\\ &\dot p_y = -\mu^{-1}x - \mu^{2g_x-g_y-2}Dx^2 + \mu^{g_y-2}Cy^2, && \dot y = p_y. \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Из (1.4.15) видно, что $\chi = 1$, поэтому мы будем искать асимптотики при $t \to 0$.

Для сохранения нелинейного члена в первом уравнении (1.4.15) необходимо положить $g_y = 2$. Выбор g_x оставляет больше вариантов. Если задаться целью сохранить все нелинейные члены в (1.4.15), то следует принять $g_x = 2$. Положив $\mu = \infty$, получим укороченную систему, которая имеет частное решение:

$$p_x = p_{x_0}t^{-3}, \quad x = x_0t^{-2}, \quad p_y = p_{y_0}t^{-3}, \quad y = y_0t^{-2},$$

где

$$p_{x_0} = -2x_0, \quad x_0 = \pm\frac{3}{D}(2+\delta^{-1})^{1/2}, \quad p_{y_0} = -2y_0, \quad y_0 = -\frac{3}{D}, \quad \delta = \frac{D}{C}.$$

Параметр $\delta \in \mathbb{R}$ в дальнейшем будет играть существенную роль.

Исследуем случаи, когда разложения решений системы (1.4.14), существование которых гарантируется теоремой 1.1.2, не содержат логарифмов времени, т. е. имеют вид

$$\begin{aligned} p_x(t) &= t^{-3}\sum_{k=0}^{\infty} p_{x_k} t^k, \quad x(t) = t^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k, \\ p_y(t) &= t^{-3}\sum_{k=0}^{\infty} p_{y_k} t^k, \quad y(t) = t^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k, \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

где $p_{x_k} = (k-2)x_k$, $p_{y_k} = (k-2)y_k$.

Заметим, что в силу обратимости системы уравнений с гамильтонианом (1.4.13), все коэффициенты в (1.4.16) с нечетными номерами обращаются в нуль.

Нетрудно подсчитать собственные числа матрицы Ковалевской, которые в рассматриваем случае равны

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = 6, \quad \rho_{3,4} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\big(1 - 24(1+\delta^{-1})\big)^{1/2}.$$

Таким образом, логарифмы могут появиться либо на третьем шаге ($k = 6$), либо при резонансах

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\big(1 - 24(1+\delta^{-1})\big)^{1/2} = 2l = k. \tag{1.4.17}$$

Вычисления, проведенные при помощи программы символьных выкладок DERIVE, показали, что при $k = 6$ логарифмы не появляются. Поэтому при отсутствии резонансов (1.4.17) разложения (1.4.16) действительно не содержат логарифмов времени.

Если не ставить задачей сохранение квадратичного по x члена во втором уравнении (1.4.15) при выделении укорочения, то следует выбрать $g_x < 2$. Чтобы система (1.4.14) оставалась полуквазиоднородной в смысле принятых определений, необходимо еще, чтобы g_x было рациональным.

Анализ, проведенный в работе [153], показывает, что система уравнений (1.4.14) имеет частные решения с главными членами асимптотического разложения

$$p_x(t) \sim p_{x_0} t^{\Delta_\pm(\delta)-1}, \quad x(t) \sim x_0 t^{\Delta_\pm(\delta)}, \quad p_y(t) \sim p_{y_0} t^{-3}, \quad y(t) \sim y_0 t^{-2}$$

при $t \to 0$, где $p_{x_0} = \Delta_\pm(\delta)c$, $x_0 = c$, $p_{y_0} = \dfrac{12}{C}$, $y_0 = \dfrac{6}{C}$, c — некоторая произвольная постоянная, а $\Delta_\pm(\delta) = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}(1-48\delta)^{1/2}$. Величины $\Delta_\pm(\delta)$ могут быть, разумеется, иррациональными, а при $\delta > \dfrac{1}{48}$ даже комплексными. Это означает, что такого сорта решения не могут быть построены при помощи алгоритма теоремы 1.1.2 ни при каком квазиоднородном укорочении.

Какова же природа построенных в работе [153] решений? При любом рациональном $g_x < 2$ укороченная система

$$\dot p_x = -2Dxy, \quad \dot x = p_x, \quad \dot p_y = Cy^2, \quad \dot y = p_y$$

имеет частное решение

$$p_x \equiv 0, \quad x \equiv 0, \quad p_y = -{}^{12t^{-3}}/_{C}, \quad y = {}^{6t^{-2}}/_{C},$$

порожденное данной квазиоднородной структурой.

Нетрудно убедиться, что показатели матрицы Ковалевской при этом равны

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = 6, \quad \rho_{3,4} = \Delta_\pm(\delta) + g_x.$$

Применение теоремы 1.3.1, следовательно, позволяет установить существование частных решений (1.4.14) с указанной асимптотикой.

Пример 1.4.6. Уравнения Пенлеве [1, 36, 38] могут служить примером неавтономных полуквазиоднородных систем. Говорят, что дифференциальное уравнение не имеет подвижных критических точек, если особенности его решений не заполняют некоторую область в комплексной плоскости. Пенлеве и Гамбье классифицировали уравнения вида

$$\ddot x = R(\dot x, x, t),$$

не имеющие подвижных критических точек, где R — рациональная функция от x, $\dot x$ с мероморфными по t коэффициентами. Уравнения, обладающие этим свойством часто называют уравнениями класса P. Был найден список из 50 уравнений, таких, что каждое уравнение класса P может быть получено из одного из уравнений этого списка при помощи некоторого голоморфного диффеоморфизма, обладающего некоторыми дополнительными свойствами, которые здесь мы обсуждать не будем. Из этих пятидесяти уравнений 44 интегрируются в квадратурах или приводятся к уравнениям вида

$$Q(\dot{x}, x, t) = 0,$$

где Q — полином по $\dot{x}, x$ с мероморфными коэффициентами. Остальные 6 называются уравнениями Пенлеве. Перечислим их:

$$\text{I.} \quad \ddot{x} = 6x^2 + t \tag{1.4.18}$$

$$\text{II.} \quad \ddot{x} = 2x63 + tx + a \tag{1.4.19}$$

$$\text{III.} \quad \ddot{x} = \dot{x}^2 x^{-1} + e^t(ax^2 + b) + e^{2t}(cx^3 + dx^{-1}) \tag{1.4.20}$$

$$\text{IV.} \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 x^{-1} + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - a)x + bx^{-1} \tag{1.4.21}$$

$$\text{V.} \quad \ddot{x} = \dot{x}^2\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right) - \frac{\dot{x}}{t} + \frac{(x-1)^2}{t^2}\left(ax + \frac{b}{x}\right) + \tag{1.4.22}$$
$$+ c\frac{x}{t} + d\frac{x(x+1)}{x-1}$$

$$\text{VI.} \quad \ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right) - \dot{x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right) + \tag{1.4.23}$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left(a + b\frac{1}{x^2} + c\frac{t-1}{(x-1)^2} + d\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right).$$

Все решения первых четырех уравнений Пенлеве — мероморфные функции. Решения пятого уравнения имеют логарифмические точки ветвления $t = 0$, $t = \infty$, а шестого: $t = 0$, $t = 1$, $t = \infty$.

Исследуем вид разложений решений уравнений Пенлеве, получаемых при помощи описанных выше алгоритмов.

Записанные в виде систем двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 6x^2 + t,$$
$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 2x^3 + tx + a$$

первое и второе уравнения Пенлеве (1.4.18), (1.4.19) являются отрицательно полуквазиоднородными относительно структур, порождаемых соответственно матрицами $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(2, 3)$ и $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 2)$. Параметр β в обоих случаях можно считать равным -1.

Их квазиоднородные укорочения

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 6x^2,$$
$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 2x^3$$

имеют очевидные решения

$$x = {}^{1}\!/_{t^2}, \qquad y = -{}^{2}\!/_{t^3},$$
$$x = {}^{1}\!/_{t}, \qquad y = -{}^{1}\!/_{t^2}.$$

Собственные значения матрицы Ковалевской равны -1, 6 для первого уравнения Пенлеве и -1, 4 для второго. Тщательный анализ показывает, что логарифмы на соответствующих шагах не появляются, что подтверждается общей теорией. Соответствующие лорановские разложения решений будут иметь вид

$$x(t) = t^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$$

для уравнения (1.4.18) и

$$x(t) = t^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$$

для уравнения (1.4.19).

При помощи введения вспомогательных переменных $y = \dot{x}$, $z = x^{-1}$ третье и четвертое уравнения Пенлеве (1.4.20), (1.4.21) превращаются в отрицательно полуквазиоднородные системы трех уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = y^2 z + e^t(ax^2 + b) + e^{2t}(cx^3 - dz), \qquad \dot{z} = -yz^2,$$
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{2}y^2 z + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - a)x + bz, \quad \dot{z} = -yz^2.$$

Вспомогательная переменная z вводится здесь и далее для того, чтобы избежать появления отрицательных степеней x и бесконечных тейлоровских сумм относительно этой же переменной в правых частях рассматриваемых систем.

Соответствующие матрицы $\mathbf{G}$ имеют при этом вид $\mathrm{diag}(1, 2, -1)$, а параметр $\beta = -1$. Укороченные системы в обоих случаях аналогичны. Их можно записать в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Ay^2 z + Bx^3, \quad \dot{z} = -yz^2, \tag{1.4.24}$$

где $A = 1$, $B = c$ для третьего уравнения Пенлеве, $A = {}^1\!/_2$, $B = {}^3\!/_2$ — для четвертого.

Система (1.4.24) имеет частное решение в виде квазиоднородного луча

$$x = \left(\frac{2-A}{B}\right)^{1/2} t^{-1}, \quad y = -\left(\frac{2-A}{B}\right)^{1/2} t^{-2}, \quad z = \left(\frac{2-A}{B}\right)^{1/2} t.$$

Собственные значения матрицы Ковалевской, отвечающей этому решению, равны -1, 1, $-2(A-2)$. Поэтому для третьего и четвертого уравнения Пенлеве они соответственно равны -1, 1, 2 и -1, 1, 3.

Весьма сложные вычисления, проведенные с помощью программы символьных выкладок DERIVE, показали, что логарифмы на соответствующих шагах не появляются, поэтому искомые решения уравнений (1.4.20), (1.4.21) могут быть представлены рядами Лорана вида

$$x(t) = t^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k,$$

что согласуется с их мероморфностью.

Однако уже пятое и шестое уравнения Пенлеве (1.4.22), (1.4.23) не могут быть представлены в виде полуквазиоднородных систем без дополнительных «ухищрений».

Рассмотрим сначала пятое уравнение Пенлеве. Произведем в (1.4.22) логарифмическую замену времени $\tau = \ln t$. Тогда после введения уже описанных вспомогательных переменных $y = x'$, $z = x^{-1}$, где штрих означает производную по новой независимой переменной τ, (4.22) запишется в виде системы трех уравнений

$$\begin{gathered} x' = y, \\ y' = y^2 \frac{z(z-3)}{2(z-1)} + (x-1)^2(ax+bz) + ce^{\tau}x + de^{2\tau}\frac{x(z+1)}{(z-1)}, \\ z' = -yz^2. \end{gathered}$$

Эта система полуквазиоднородна, $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$, $\beta = -1$. Соответствующее укорочение снова имеют вид (1.4.22), если в качестве независимой переменной принять логарифмическое время τ. При этом $A = {}^3\!/_2$, $B = a$, поэтому показатели Ковалевской будут равны -1, 1, 1. Следовательно, логарифмы в искомом разложении могут появиться лишь на первом шаге.

Анализ, проведенный при помощи программы DERIVE показал, что этого не происходит, поэтому искомое решение пятого уравнения Пенлеве (1.4.22) может быть разложено в ряд Лорана по τ

$$x(\tau) = \tau^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \tau^k,$$

или, после возвращения к исходной независимой переменной t,

$$x(t) = \ln^{-1} t \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ln^k t,$$

что показывает, что $t = 0$ — логарифмическая точка ветвления.

Для того, чтобы исследовать шестое уравнение Пенлеве (1.4.23), произведем логарифмическую замену времени с двумя особенностями $\tau = \ln(t(t-1))$. Введем далее вспомогательные переменные $y = x'$, $z = x^{-1}$, где штрих означает производную по новому «времени» τ. Уравнение (1.4.23) перепишется тогда в виде системы трех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&x' = y,\\
&y' = y^2 \frac{z(\phi z^2 - 2z(\phi+1)+3)}{2(z-1)(\phi z-1)} + \frac{e^\tau y}{2\phi - 1}\left(\frac{2}{2\phi-1} - \frac{z}{\phi z - 1}\right) + \\
&\qquad + \frac{x(x-1)(x-\phi)}{(2\phi-1)^2}\left(a + b\phi z^2 + c\frac{z^2(\phi-1)}{(z-1)^2} + d\frac{z^2\phi(\phi-1)}{(\phi z-1)^2}\right),\\
&z' = -yz^2,
\end{aligned}$$

где для удобства введено обозначение $\phi = \phi(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4e^\tau}\right)$.

Полученная система является отрицательно полуквазиоднородной; матрица, задающая квазиоднородную шкалу, снова имеет вид $\mathbf{G} = \operatorname{diag}(1, 2, -1)$, $\beta = -1$. Укороченная система имеет вид (1.4.23), где за независимую переменную принято новое время τ, $A = 3/2$, $B = 4a/5$. Как и для пятого уравнения Пенлеве показатели Ковалевской равны $-1, 1, 1$, поэтому логарифмы могут появиться лишь на первом шаге.

Для этого случая также при помощи программы DERIVE была получена система уравнений для нахождения первых коэффициентов и обнаружено, что логарифмы при ее решении не возникают. Следовательно, искомое решение может быть построено в виде обыкновенных рядов Лорана

$$x(\tau) = \tau^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \tau^k,$$

откуда получим разложение относительно исходной независимой переменной t

$$x(t) = \ln^{-1}(t(t-1)) \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ln^k(t(t-1)).$$

Следовательно, $t = 0$ и $t = 1$ являются логарифмическими точками ветвления. Чтобы исследовать характер особенности решений уравнений Пенлеве на бесконечности, нужно сделать замену времени $t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

Пример 1.4.7. В заключение обсудим гипотезу В. В. Тена о неустойчивости изолированных равновесий динамических систем с инвариантной мерой в нечетномерном пространстве. Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4.25}$$

автономная система дифференциальных уравнений, допускающая инвариантную меру с гладкой плотностью:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{f}) = 0. \tag{1.4.26}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — положение равновесия: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

В. В. Тен высказал предположение, что если n нечетно и равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ изолировано, то оно неустойчиво по Ляпунову. Эта гипотеза имеет важное следствие: все изолированные положения равновесия стационарных течений жидкости в трехмерном евклидовом пространстве неустойчивы.

В типичной ситуации система (1.4.25) имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + O(|\mathbf{x}|), \quad \det \mathbf{A} \neq 0. \tag{1.4.27}$$

Перепишем «уравнение неразрывности» (1.4.26):

$$\dot{\nu} = -\operatorname{div} \mathbf{f}, \quad \nu = \ln \rho.$$

Полагая в этом уравнении $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, получаем равенство $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$. Следовательно, сумма всех собственных значений матрицы оператора $\mathbf{A}$ равна нулю. Хотя бы одно из собственных значений лежит в правой полуплоскости. Действительно, в противном случае спектр $\mathbf{A}$ расположен на мнимой оси. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ вещественная, сумма всех ее собственных значений равна нулю и n нечетно, то нуль обязательно будет собственным значением. Однако это противоречит предположению о невырожденности матрицы. Следовательно, по теореме Ляпунова $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — неустойчивое равновесие системы (1.4.27).

Аналогично доказывается, что невырожденная периодическая траектория динамической системы с инвариантной мерой в *четномерном* пространстве всегда неустойчива. Напомним, что периодическая орбита называется *невырожденной*, если ее мультипликаторы отличны от единицы. Это наблюдение справедливо и для невырожденных *приводимых* инвариантных торов нечетной коразмерности, заполненных условно-периодическими траекториями.

Как показано в [66], утверждение о неустойчивости можно распространить на положительно полуквазиоднородные системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{f}_m + \sum_{\alpha>m} \mathbf{f}_\alpha,$$

где $\mathbf{f}_k$ — квазиоднородные поля степени k с одной и той же матрицей квазиоднородности $\mathbf{G}$. Единственное дополнительное условие состоит в том, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — *единственное* равновесие квазиоднородного поля $\mathbf{f}_m$.

Действительно, поскольку n нечетно и $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — единственный нуль квазиоднородного поля $\mathbf{f}_m$, то (согласно лемме 1.1.1) найдется ненулевой вектор $\mathbf{z}$, удовлетворяющий одному из уравнений

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{z}) = -\mathbf{G}\mathbf{z} \quad \text{или} \quad \mathbf{f}_m(\mathbf{z}) = \mathbf{G}\mathbf{z}.$$

По теореме 1.1.2 в этом случае уравнения (1.4.25) допускают решения с асимптотикой

$$Zt^{-G} \quad \text{или} \quad Z(-t)^{-G}$$

соответственно при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Эти решения стремятся к равновесию $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to \pm\infty$. Если имеется решение второго вида («выходящие из точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$»), то, очевидно, равновесие неустойчиво. Осталось рассмотреть случай, когда имеется решение, асимптотическое к равновесию при $t \to +\infty$.

Воспользуемся утверждением, представляющим и самостоятельный интерес.

Лемма 1.4.1. *Предположим, что система* (1.4.25) *с инвариантной мерой допускает нетривиальное решение* $t \mapsto x(t)$*, которое стремится к нулю при* $t \to +\infty$*. Тогда равновесие* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчиво.*

Действительно, пусть точка $x_0 = x(0)$ лежит вне некоторой ε_0-окрестности нуля. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется малая окрестность U_ε точки x_0, которая под действием фазового потока через некоторое время целиком окажется в ε-окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Однако, по эргодической теореме Шварцшильда – Литтлвуда [42], почти все точки, расположенные в начале U_ε, покинут ε_0-окрестность нуля. Это доказывает неустойчивость равновесия, поскольку выходящие траектории пересекаются с ε-окрестностью нуля.

В работе [66] показано, что гипотеза Тена не справедлива для *бесконечно гладкого* вектора поля $\mathbf{f}$ без каких-либо дополнительных предположений о невырожденности: в построенном контрпримере ряд Маклорена этого поля нулевой. Не исключено, что обсуждаемая гипотеза справедлива в *аналитическом* случае.

5. Теоретико-групповая интерпретация

Прежде чем приступать к изложению последующего материала, вернемся к содержанию первого параграфа. Нашей целью было построение частных решений некоторой системы дифференциальных уравнений при помощи частного решения так называемой укороченной или модельной системы. Выбор укорочения диктуется при этом некоторой «шкалой», порожденной квазиоднородной группой преобразований (1.1.11) расширенного фазового пространства. Полученная укороченная система инвариантна относительно данной группы преобразований, а используемое «опорное» решение укороченной системы лежит на некоторой орбите этой группы. Для систем дифференциальных уравнений, правые части которых представимы в виде рядов (1.1.4), введение квазиоднородной шкалы довольно естественно. Возникает, однако, вопрос о возможности использования какой либо другой однопараметрической группы преобразований расширенного фазового пространства для построения такого рода шкалы. Другая немаловажная проблема состоит в достраивании частных решений полученной таким образом укороченной системы до решений полной системы. Этим вопросам и посвящен настоящий параграф.

Излагаемый ниже материал содержит некоторые факты из теории групп симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений. Для более подробного знакомства с этой теорией можно порекомендовать монографии [93, 94].

Рассмотрим гладкую автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.5.1}$$

заданную в некоторой области Ω фазового пространства $\mathbb{R}^n$ и некоторую однопараметрическую полугруппу преобразований $\mathbf{X}$ области Ω в себя:

$$\mathbf{X}\colon \Omega[0, \chi \times \infty) \to \Omega, \quad \chi = \pm 1, \quad \mathbf{X}(\cdot, 0) = \mathrm{id}\,.$$

Пусть гладкое векторное поле $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ является инфинитезимальной образующей, а параметр σ — параметром этой полугруппы. Параметр σ принадлежит либо правому, либо левому бесконечному полуинтервалу в зависимости от знака. Рассмотрим порождающую данную полугруппу систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{1.5.2}$$

Вообще говоря, если ограничить область изменения параметра σ на некоторый малый конечный интервал $(-\sigma_0, +\sigma_0)$, то согласно теореме существования и единственности решений системы (1.5.2) $\mathbf{X}$ будет группой. Однако в дальнейшем нас будут интересовать также бесконечные значения параметра σ, поэтому здесь более логично говорить о *полугруппах* преобразований, поскольку может случиться так, что соответствующий элемент $\mathbf{X}$ не будет иметь обратного (мы *a priori* предполагаем, что решение существует по крайней мере на бесконечном полуинтервале). Для простоты изложения мы будем далее игнорировать этот факт и говорить о группах преобразований. Также для простоты мы будем считать, что рассматриваемая группа действует глобально на всей области Ω.

Определение 1.5.1. Мы будем говорить, что $\mathbf{X}$ является *обобщенной группой симметрии* системы (1.5.1), если после замены

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, \sigma) \tag{1.5.3}$$

система (1.5.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \phi(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{y}), \tag{1.5.4}$$

где $\phi\colon \Omega \times [0, \chi \times \infty) \to \mathbb{R}^+$ — некоторая положительная функция. Поскольку $\mathbf{X} = \mathrm{id}$ при $\sigma = 0$, то $\phi(\mathbf{y}, 0) = 1$. Если $\phi(\mathbf{y}, \sigma) \equiv 1$ для любых $\mathbf{y}$, σ то будем говорить, что $\mathbf{X}$ является *группой симметрии* (1.5.1).

Если $\mathbf{X}$ — группа симметрии, то соответствующие преобразования переводят решения системы (1.5.1) в решения той же системы. Если же $\mathbf{X}$ — обобщенная группа симметрии, то $\mathbf{X}$ оставляет инвариантными лишь семейство траекторий, а параметризация решений изменяется [93, 94]. Докажем один вспомогательный результат.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— обобщенная группа симметрии системы* (1.5.1)*, порожденная системой* (1.5.5)*. Тогда для любого* $\mathbf{x} \in \Omega$ *имеет место равенство*

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = -\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, 0)\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.5.5}$$

где

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = (d\mathbf{g})\mathbf{f} - (d\mathbf{f})\mathbf{g}$$

— скобка на алгебре Ли гладких векторных полей.

Доказательство. Применим преобразование (1.5.3) к системе (1.5.1). Поскольку

$$\dot{\mathbf{x}} = d_y\mathbf{X}(\mathbf{y}, \sigma)\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

то из (1.5.4) следует

$$\phi(\mathbf{y}, \sigma)d_y\mathbf{X}(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.5.6}$$

(здесь и далее для сокращения записи мы будем писать $\mathbf{x}$ вместо $\mathbf{X}(\mathbf{y}, \sigma)$).

Далее нам понадобится следующее утверждение из общей теории дифференциальных уравнений (см., например, [14]).

Лемма 1.5.2. *Пусть* $\mathbf{U}(\mathbf{y}, \sigma)$ *— фундаментальная матрица линейной системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = d\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

нормированная условием $\mathbf{U}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{E}$*. Тогда имеет место равенство*

$$d_y\mathbf{X}(\mathbf{y}, \sigma) = \mathbf{U}(\mathbf{y}, \sigma). \tag{1.5.7}$$

Продолжим доказательство леммы 1.5.1. Подставим (1.5.7) в (1.5.6) и продифференцируем по σ. В результате получим следующее тождество:

$$\phi(\mathbf{y}, \sigma)d\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{U}(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{y}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Поскольку $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ при $\sigma \to 0$, то, переходя к пределу, получим

$$d\mathbf{g}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, 0)\mathbf{f}(\mathbf{y}) = d\mathbf{f}(\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

Так как при фиксированном σ преобразование $\mathbf{x}$ осуществляет диффеоморфизм области Ω, то, возвращаясь к переменным $\mathbf{x}$, получим требуемое соотношение (1.5.5).

Лемма доказана.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 1.5.3. *Пусть существует гладкая функция* $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что имеет место равенство*

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.5.8}$$

тогда $\mathbf{X}$ (*фазовый поток векторного поля* $\mathbf{g}$) — *обобщенная группа симметрии системы* (1.5.1).

Доказательство. Пусть под действием группы $\mathbf{X}$ система (1.5.1) приобретает вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \phi(\mathbf{y}, \sigma)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \sigma).$$

Положим

$$\phi(\mathbf{y}, \sigma) = \exp\left(\int\limits_0^\sigma \psi(\mathbf{x})\, d\sigma\right).$$

Тогда

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \sigma) = \exp\left(-\int\limits_0^\sigma \psi(\mathbf{x})\, d\sigma\right) \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1.5.9}$$

Нам необходимо доказать, что $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \sigma) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ для любого σ.

Из (1.5.9) непосредственно следует, что $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Дифференцируя (1.5.9) по σ, используя (1.5.8) и формулу дифференцирования обратной матрицы, получим

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \sigma) = \exp\left(-\int\limits_0^\sigma \psi(\mathbf{x})\, d\sigma\right) \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}, \sigma)\bigl(-d\mathbf{g}(x)\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + {} \\ {} + d\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\bigr) = 0,$$

откуда и следует необходимое утверждение.

Лемма доказана.

Приведем еще одно техническое утверждение.

Лемма 1.5.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *является обобщенной группой симметрии системы* (1.5.1)*. После замены переменных*

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t) \tag{1.5.10}$$

система (1.5.1) *примет вид*

$$\dot{\mathbf{y}} = \phi(\mathbf{y}, t)\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

Если $\mathbf{X}$ *является группой симметрии, то* (1.5.1) *перепишется в виде*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}). \tag{1.5.11}$$

Доказательство. Для сокращения записи будем аналогично предыдущему обозначать $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$. Имеет место равенство

$$\dot{\mathbf{x}} = d_y\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Пусть после преобразования (1.5.10) система (1.5.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}, t)\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \phi(\mathbf{y}, t)\big(\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t)\big).$$

Очевидно, что при $t = 0$ $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Вычислим производную по времени от $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t)$ Используя формулу дифференцирования обратной матрицы, получим

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = -\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}, t)\big(d\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) - d\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть группа симметрии системы (1.5.1) порождает некоторое решение этой системы, т. е. существует такое $\mathbf{y}_0 \in \Omega$, что $\mathbf{X}(\mathbf{y}_0, t)$ является частным решением (1.5.1). Тогда для автономной системы (1.5.11) $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ будет особой точкой, т. е.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0). \tag{1.5.12}$$

Чтобы сохранить единство стиля изложения, векторные поля, обладающие группами симметрии, как и раньше, будем обозначать $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}$. Можно рассмотреть аналог матрицы Ковалевской

$$\mathbf{K} = d\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) - d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0). \tag{1.5.13}$$

Лемма 1.5.5. *Среди собственных значений матрицы* (1.5.13) *всегда есть нуль.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0)$. Используя тождество $[\mathbf{f}_{\mathrm{q}}, \mathbf{g}] \equiv 0$ и равенство (1.5.12), получим

$$\mathbf{K}\mathbf{p} - d\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) - d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) = d\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0)\big(\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\big) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение 1.5.2. Мы будем говорить, что $\mathbf{X}$ является *экспоненциально-асимптотической группой симметрии* системы (1.5.1), если правая часть (1.5.1) может быть разложена в сумму

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x})$$

такую, что после замены (1.5.3) система (1.5.1) преобразуется к виду

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta\sigma}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}), \tag{1.5.14}$$

где $\operatorname{sign}\beta = \chi$ является аналогом знака полуквазиоднородности.

Очевидно, что вектор-функции должны удовлетворять соотношениям

$$[\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = m\beta\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}). \tag{1.5.15}$$

Формально при $\sigma \to \chi \times \infty$ и после замены $\mathbf{y}$ на $\mathbf{x}$ система дифференциальных уравнений (1.5.14) переходит в «укороченную» систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}).$$

Очевидно, что после замены (1.5.10) система (1.5.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \sum_{m=1} e^{-m\beta t}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}). \tag{1.5.16}$$

Если укороченная система имеет частное решение $\mathbf{X}(\mathbf{y}_0, t)$, о котором говорилось выше, то приняв $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{u}$, перепишем систему (1.5.16) в виде, использовавшемся в леммах 1.3.2, 1.3.3 и 1.3.5:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}, t), \tag{1.5.17}$$

где

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}) - \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_\mathbf{0}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_\mathbf{0}),$$
$$\psi(\mathbf{u}, t) = \sum_{m=1} e^{-m\beta t}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}_\mathbf{0} + \mathbf{u}).$$

Используя развитую в предыдущих параграфах методику, можно утверждать, что (1.5.17) всегда имеет гладкое частное решение, представимое в виде экспоненциального ряда

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k(t) e^{-k\beta t}, \tag{1.5.18}$$

где $\mathbf{u}_k$ — некоторые полиномиальные вектор-функции, которые могут быть выбраны постоянными, если матрица $\mathbf{K}$ не имеет собственных чисел вида $-k\beta$, $k \in \mathbb{N}$.

Если все коэффициенты $\mathbf{u}_k$ постоянны, то в аналитическом случае, используя абстрактную теорему о неявной функции [50], можно доказать сходимость рядов (1.5.18).

Если же, кроме того, матрица $\mathbf{K}$ имеет l характеристических чисел, действительные части которых имеют знаки, совпадающие со знаком $-\beta$, а знаки остальных противоположны, то (1.5.17) обладает l-параметрическим семейством частных решений, стремящихся к $\mathbf{u} = 0$ при $t \to \chi \times \infty$.

Итак, мы установили следующий результат.

Теорема 1.5.1. *Пусть система* (1.5.1) *обладает экспоненциально-асимптотической группой симметрии, которая порождает частное решение* $\mathbf{X}(\mathbf{y}_0, t)$ *укороченной системы для некоторого* $y_0 \in \Omega$. *Тогда полная система* (1.5.1) *имеет частное решение вида*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{y}_0 + o(1), t) \quad \text{\textit{при}} \quad t \to \chi \times \infty.$$

Кроме того существует l-параметрическое семейство таких решений, если характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0$$

имеет l корней, знаки вещественных частей которых совпадают со знаком $-\beta$, а вещественные части остальных нулевые или имеют обратный знак.

Пример 1.5.1. Классический первый метод Ляпунова допускает рассмотренную теоретико-групповую интерпретацию. В самом деле, рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений, для которой $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является особой точкой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{x}), \tag{1.5.19}$$

где $\mathbf{A}$ — вещественная матрица, а $\mathbf{f}_{m+1}$ — однородные вектор-функции степени $m+1$.

Рассмотрим простейшую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = -\beta\mathbf{x}, \tag{1.5.20}$$

где β — некоторое вещественное число.

Легко заметить, что система (1.5.20) порождает однородную группу растяжений фазового пространства $\mathbb{R}^n$, являющуюся группой симметрии укороченной линейной системы ($\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$). Для полной же системы указанная группа будет экспоненциально-асимптотической группой симметрии. Если число $-\beta$ является собственным числом матрицы $\mathbf{A}$, то укороченная система будет иметь частное решение вида $\mathbf{x} = e^{-\beta t}\mathbf{y}_0$ ($\mathbf{y}_0$ — ненулевой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$), лежащее на орбите этой группы. Из теоремы 1.5.1 тогда следует, что система (1.5.19) имеет частное решение, представимое в виде ряда

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(t) e^{-k\beta t},$$

где $\mathbf{x}_k(t)$ — некоторые полиномиальные функции времени t, а $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{y}_0$.

Существование семейств решений, стремящихся к экспоненциальному «опорному» решению $\mathbf{x} = e^{-\beta t}\mathbf{y}_0$ при $t \to \chi \times \infty$, зависит от числа собственных значений матрицы $\mathbf{K} = \mathbf{A} + \beta\mathbf{E}$ с положительной (или отрицательной) вещественной частью.

Рассмотренный метод позволяет также строить решения с *экспоненциальной асимптотикой*, наличие которых не может быть предсказано *квазилинейной теорией*.

Пример 1.5.2. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 2x + ax^2y, \quad \dot{y} = -3x^3y^3 + bxy^2. \tag{1.5.21}$$

Фазовый поток линейной системы

$$\frac{dx}{d\sigma} = 2x, \quad \frac{dy}{d\sigma} = -3y$$

порождает экспоненциально-асимптотическую группу симметрии (1.5.21) с $\beta = 1$.

Действительно, введя обозначения

$$\mathbf{g} = (2x, -3y), \quad \mathbf{f}_{\mathrm{q}} = (2x, -3x^3y^3), \quad \mathbf{f}_{\mathrm{q}+1} = (ax^2y, bxy^2),$$

получим коммутационные соотношения типа (1.5.15)

$$[\mathbf{f}_{\mathrm{q}}, \mathbf{g}] = (0, 0), \quad [\mathbf{f}_{\mathrm{q}+1}, \mathbf{g}] = \mathbf{f}_{\mathrm{q}+1}.$$

Укороченная система

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = -3x^3y^3$$

имеет однопараметрическое семейство частных решений

$$x_0(c,t) = ce^{2t}, \quad y_0(c,t) = c^{-3/2}e^{-3t}, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Легко вычислить набор собственных чисел матрицы $\mathbf{K}$, отвечающий данному семейству решений: 0, -12.

Пользуясь теоремой 1.5.1, получаем, что система уравнений (1.5.21) имеет однопараметрическое семейство частных решений, представимых в виде рядов

$$x(c,t) = e^{2t}\sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)e^{-kt}, \quad y(c,t) = e^{-3t}\sum_{k=0}^{\infty} y_k(t)e^{-kt},$$

где $x_0 = c$, $y_0 = c^{-3/2}$, а полиномы по t могут появиться лишь на двенадцатом шаге.

Примечательно то, что при $t \to +\infty$ решения из построенного семейства ведут себя также, как решения линейной гиперболической системы с характеристическими показателями 2, -3; хотя линеаризованная система позволяет предсказать лишь существование решений с асимптотикой $\sim e^{2t}$ при $t \to -\infty$. Вид этих решений очевиден: прямая $y = 0$ является неустойчивым инвариантным многообразием. На этом многообразии решения системы (1.5.21) имеют вид

$$c(c_*, t) = c_*e^{2t}, \quad y(c_*, t) = 0.$$

Здесь c_* — параметр данного семейства решений.

До настоящего момента мы рассматривали лишь автономный случай и группы преобразований, действию которых подвергались изучаемые системы дифференциальных уравнений, не затрагивающие независимую переменную.

Рассмотрим теперь неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1.5.22}$$

заданную в некоторой области Ω расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Развитую выше методику можно было бы применить к неавтономной системе (1.5.22), представив ее как автономную систему в расширенном фазовом пространстве

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varphi), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Однако неавтономный случай имеет свои специфические особенности. Чтобы подчеркнуть их, мы заново построим необходимую теорию.

Пусть на области Ω действует некоторая однопараметрическая (полу-группа) преобразований

$$(\mathbf{X}, T)\colon \Omega \times [0, \chi \times \infty) \to \Omega, \quad \chi = \pm 1, \quad (\mathbf{X}, T)(\cdot, \cdot, 0) = \mathrm{id},$$

порождаемая системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dt}{d\sigma} = h(\mathbf{x}, t). \tag{1.5.23}$$

Далее будем предполагать, что в области Ω гладкая функция $h(\mathbf{x}, t)$ не обращается в нуль.

Рассмотрим замену зависимой и независимой переменных, порождаемую системой дифференциальных уравнений (1.5.23)

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau, \sigma), \quad t = T(\mathbf{y}, \tau, \sigma), \quad \sigma = \mathrm{const}. \tag{1.5.24}$$

Пусть под действием замены (1.5.24) система (1.5.22) преобразуется к виду

$$\mathbf{y}' = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma), \tag{1.5.25}$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной τ.

Очевидно, что $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$.

Лемма 1.5.6. *Для того, чтобы система* (1.5.22) *под действием замены* (1.5.24) *преобразовывалась к виду* (1.5.25), *необходимо и достаточно,* *чтобы для любых* $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ *выполнялось равенство*

$$(L^{\mathbf{g}}\mathbf{f})(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - (D_t^{\mathbf{f}} h)(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.5.26)$$

где $L^{\mathbf{g}} = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + [\cdot, \mathbf{g}]$ *— оператор Ли,* $D_t^{\mathbf{f}} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \langle d_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}\rangle$ *— оператор полной производной по времени в силу системы уравнений* (1.5.22)*,* $\mathbf{d}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *— гладкая вектор-функция, удовлетворяющая соотношению*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, t, 0). \quad (1.5.27)$$

Доказательство. Вычислим дифференциалы левой и правой частей (1.5.24)

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d_y\mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\tau + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\sigma, \\ dt &= \langle d_y T(\mathbf{y}, \tau, \sigma),\, d\mathbf{y}\rangle \frac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\tau + \frac{\partial T}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \quad (1.5.28)$$

Поскольку параметр σ постоянен, и имеют место дифференциальные соотношения $d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, dt$, $d\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\, d\tau$, то из (1.5.28) следует равенство

$$\begin{aligned} &d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) = \\ &\qquad = \left\{\left\langle d_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y}, \tau, \sigma), \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\right\rangle + \frac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\right\} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

где (как и ранее) используются обозначения $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)$, $t = T(\mathbf{y}, \tau, \sigma)$.

Далее в этом параграфе для упрощения записи при умножении векторно-матричных объектов различной размерности мы будем пользоваться стандартными обозначениями матричной алгебры. При этом векторные поля и вектор-функции $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{X}$, а также их производные по «времениподобным» переменным t, τ, σ являются векторами, т. е. матрицами размером $n \times 1$, а дифференциалы скалярных функций h, T по пространственным переменным $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — ковекторами, т. е. матрицами размером $n \times 1$. Все скалярные величины будем считать матрицами размером 1×1.

Согласно лемме 1.5.2, матрица $d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$, вектор $\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$, ковектор $d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma)$ и функция $\dfrac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$ удовлетворяют матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\begin{pmatrix} d_{\mathbf{y}}\mathbf{X} & \dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{X} \\ d_{\mathbf{y}}T & \dfrac{\partial}{\partial\tau}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t) & -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x},t) \\ d_{\mathbf{x}}h(\mathbf{x},t) & \dfrac{\partial}{\partial t}h(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\mathbf{y}}\mathbf{X} & \dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{X} \\ d_{\mathbf{y}}T & \dfrac{\partial}{\partial\tau}T \end{pmatrix} \tag{1.5.30}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} &d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,0) = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau,0) = 0, \\ &d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau,0) = 1. \end{aligned} \tag{1.5.31}$$

Дифференцируя соотношение (1.5.29) по переменной σ, используя (1.5.30), (1.5.31), переходя к пределу при $\sigma \to 0$ и учитывая, что при этом $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$, $t \to \tau$, получим

$$\begin{gathered} d_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{y},\tau)\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau) + \frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,0) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau) = \\ = \mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)\Big\{d_{\mathbf{y}}h(\mathbf{y},\tau)\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau) + \frac{\partial h}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau)\Big\} + d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)\mathbf{g}(\mathbf{y},\tau) + h(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau). \end{gathered}$$

Возвращаясь к исходным фазовым переменным $\mathbf{x}, t$ и вводя обозначение (1.5.27), получим равенство (1.5.26). Необходимость доказана.

Пусть теперь выполнено равенство (1.5.26). Докажем, что тогда замена (1.5.24) приводит систему (1.5.22) к виду (1.5.23) при выполнении (1.5.27).

Запишем (1.5.29) в следующем виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,0) = \mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,\sigma) &= d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma) - \mathbf{f}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma), \\ \mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma) &= -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma) + \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\frac{\partial T}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma). \end{aligned}$$

Из (1.5.31) следует, что $\mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,0) = \mathbf{E}$, поэтому матрица $\mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$ обратима при малых значениях σ. Значит,

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma),$$

откуда следует, что $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,0) = \mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)$.

Вычислим производную

$$\frac{\partial\widehat{\mathbf{f}}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)=\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma)-\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\right). \quad (1.5.32)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.5.7. *Матрица* $\mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$ *и вектор* $\mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma)$ *удовлетворяют матричным неоднородным дифференциальным уравнениям*

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\mathbf{U}(\mathbf{y},\tau,\sigma)-\mathbf{d}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma), \quad (1.5.33)$$

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma)-\mathbf{d}(\mathbf{x},t)\frac{\partial T}{\partial\tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma), \quad (1.5.34)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=d_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-\mathbf{f}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{x}}h(\mathbf{x},t).$$

Доказательство. Пользуясь матричным дифференциальным уравнением (1.5.30), получим

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)=\big(d_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-\mathbf{f}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{x}}h(\mathbf{x},t)\big)d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma)+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x},t)-\right.$$
$$\left.-\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x},t)\right)d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma).$$

Используя равенство (1.5.26), приходим к (1.5.33). Равенство (1.5.34) получается аналогично. Действительно,

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)=-\big(d_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-\mathbf{f}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{x}}h(\mathbf{x},t)\big)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma)-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x},t)-\right.$$
$$\left.-\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x},t)\right)\frac{\partial}{\partial\tau}T(\mathbf{y},\tau,\sigma).$$

Используя снова (1.5.26), получим (1.5.34).

Лемма 1.5.7 доказана.

Продолжим доказательство леммы 1.5.6. Подставим равенства (1.5.33), (1.5.34) в (1.5.32):

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}}{\partial \sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\times$$
$$\times\left(\mathbf{d}(\mathbf{x},t)d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma)\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\mathbf{q}(\mathbf{y},\tau,\sigma) + \mathbf{d}(\mathbf{x},t)\frac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\right).$$

Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получим соотношение (1.5.27).

Лемма доказана.

При замене переменных (1.5.24) параметр σ был фиксирован. Зафиксируем теперь параметр τ и рассмотрим преобразование расширенного фазового пространства $(\mathbf{x},t) \mapsto (\mathbf{y},\sigma)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma), \quad t = T(\mathbf{y},\tau,\sigma), \quad \tau = \mathrm{const}. \tag{1.5.35}$$

Лемма 1.5.8. *Под действием преобразования* (1.5.35) *система* (1.5.22) *примет вид*

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = h(\mathbf{y},\tau)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma) - \mathbf{g}(\mathbf{y},\tau), \tag{1.5.36}$$

где τ выступает теперь в роли параметра.

Доказательство. Пусть $d\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\,d\sigma$. Поскольку τ фиксировано, из (1.5.28) сдует равенство

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma) =$$
$$= \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\left\{d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y},\tau,\sigma)\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma) + \frac{\partial T}{\partial \sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\right\}. \tag{1.5.37}$$

Равенство (1.5.37) можно переписать в виде

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},\tau,\sigma) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\left(-\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma) + \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\frac{\partial T}{\partial \sigma}(\mathbf{y},\tau,\sigma)\right).$$

Воспользуемся локальной обратимостью замены переменных (1.5.24). Однопараметрическая (полу-)группа преобразований

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}(\mathbf{x},\tau,-\sigma), \quad \tau = T(\mathbf{y},\tau,\sigma) \tag{1.5.38}$$

является фазовым потоком системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = -\mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau), \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = -h(\mathbf{y}, \tau). \tag{1.5.39}$$

Подставив (1.5.38) в (1.5.24), получим тождества для любой тройки $(\mathbf{x}, \tau, \sigma) \in \Omega \times (-\sigma_0, +\sigma_0)$. Дифференцируя эти тождества по σ и используя (1.5.39), получим

$$0 = -d_{\mathbf{y}}\mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau) - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)h(\mathbf{y}, \tau) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \tau, \sigma),$$
$$0 = -d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau) - \frac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)h(\mathbf{y}, \tau) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}(\mathbf{y}, \tau, \sigma).$$

Тогда, поскольку

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\left(-\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial T}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau, \sigma)\right),$$

легко получаем равенство

$$\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) = h(\mathbf{y}, \tau)\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \tau, \sigma) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau).$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к изучению групп симметрии неавтономных систем дифференциальных уравнений.

Определение 1.5.3. Будем говорить, что $(\mathbf{X}, T)$ является *расширенной группой симметрии* системы (1.5.22), если (1.5.22) остается инвариантной под действием преобразования (1.5.24).

Введение дополнительного определения *«расширенный»* необходимо, чтобы отличать группы симметрии автономных систем, действующие в расширенном фазовом пространстве, от групп симметрии, не затрагивающих независимую переменную.

Из леммы 1.5.6 следует, что для того, чтобы $(\mathbf{X}, T)$ являлась расширенной группой симметрии (1.5.22), необходимо и достаточно, чтобы для любых $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ выполнялось следующее соотношение:

$$\big(L^{\mathbf{g}}\mathbf{f}\big)(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \big(D^{\mathbf{f}}h\big)(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{1.5.40}$$

Если $(\mathbf{X}, T)$ — расширенная группа симметрии системы (1.5.22), то после замены (1.5.35) эта система примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = h(\mathbf{y}, \tau)\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau), \tag{1.5.41}$$

где τ является теперь некоторым фиксированным параметром, т. е. под действием преобразования (1.5.35) исследуемая система становится автономной.

Пусть рассматриваемая система имеет некоторое частное решение, лежащее на орбите ее расширенной группы симметрии. Это означает существование таких $(\mathbf{y}_0, \tau_0) \in \Omega$, что заданная параметрически вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}_0, \tau_0, \sigma)$, $t = (\mathbf{y}_0, \tau_0, \sigma)$ будет частным решением (1.5.22). Такое решение будет гладким, поскольку, как было оговорено выше, функция $h(\mathbf{x}, t)$ не обращается в нуль. Тогда при $\tau = \tau_0$ система уравнений (1.5.41) имеет особую точку $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, поэтому

$$h(\mathbf{y}_0, \tau_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \tau_0). \tag{1.5.42}$$

Далее, как это делалось ранее, правым частям систем уравнений, обладающих расширенной группой симметрии, мы будем приписывать индекс «q».

Аналогом матрицы Ковалевской будет служить матрица линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, получающейся из (1.5.41) при помощи линеаризации в окрестности $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$:

$$\mathbf{K} = h(\mathbf{y}_0, \tau_0)d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0) + \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0)d_{\mathbf{y}}h(\mathbf{y}_0, \tau_0) - d_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \tau_0). \tag{1.5.43}$$

Имеет место

Лемма 1.5.9. *Пусть* $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{q}}}{\partial t} \equiv 0$, $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \equiv 0$. *Тогда число* $-\dfrac{\partial h}{\partial \tau}(\mathbf{y}_0, \tau_0)$ *является собственным числом матрицы* (1.5.43).

Доказательство. Рассмотрим вектор $\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0)$. Используя равенства (1.5.40) и (1.5.42), вычислим

$$\begin{gathered}\mathbf{K}\mathbf{p} = d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0)\big(h(\mathbf{y}_0, \tau_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\big) - \\ -\frac{\partial h}{\partial \tau}(\mathbf{y}_0, \tau_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0) = -\frac{\partial h}{\partial \tau}(\mathbf{y}_0, \tau_0)\mathbf{p}.\end{gathered}$$

Лемма доказана.

Определение 1.5.4. Будем говорить, что $(\mathbf{X}, T)$ является *экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии* системы (1.5.22), если правая часть (1.5.22) может быть разложена в сумму

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}, t)$$

такую, что после замены (1.5.24) система (1.5.22) запишется в виде

$$\mathbf{y}' = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta\sigma} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}, \tau). \tag{1.5.44}$$

Если система обладает экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии, то согласно лемме 1.5.6 вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет системе уравнений в частных производных типа (1.5.26). Поскольку укорочение $\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет системе (1.5.40), то система уравнении для возмущений может быть записана в следующем виде

$$\sum_{m=1} \left\{ h(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \left[\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}, \mathbf{g}\right](\mathbf{x}, t) + \right.$$
$$\left. + \left(m\beta + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \langle d_{\mathbf{x}} h, \mathbf{f} \rangle (\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}, t) \right\} = 0. \tag{1.5.45}$$

Очевидно, что (как и ранее) при стремлении параметра σ к $\chi \times \infty$ и формальной замене $(\mathbf{y}, \tau)$ на $(\mathbf{x}, t)$ система (1.5.44) перейдет в укороченную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, t).$$

Преобразование расширенного фазового пространства (1.5.35) приводит обладающую экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии систему к виду

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = h(\mathbf{y}, \tau) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta\sigma} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}, \tau) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \tau). \tag{1.5.46}$$

Если же при этом укороченная система имеет лежащее на орбите рассматриваемой группы частное решение, то (1.5.46) при помощи «возмущающей» замены $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{u}$ можно переписать в привычном виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \sigma), \tag{1.5.47}$$

где
$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) = h(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}, \tau_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}, \tau_0) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}, \tau_0) - \\ -\mathbf{K}\mathbf{u} - h(\mathbf{y}_0, \tau_0)\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \tau_0),$$
а
$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \sigma) = h(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}, \tau_0) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\beta\sigma} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}, \tau_0).$$

Следует помнить, что правые части (1.5.47) зависят от τ_0 только как от параметра, поэтому эта зависимость в (1.5.47) не отражена.

В этом параграфе уже обсуждались асимптотические свойства решений системы (1.5.47), поскольку с точностью до замены σ на t она совпадает с системой (1.5.17). Эти свойства влекут за собой следующее утверждение о свойствах частных решений исходной системы.

Теорема 1.5.2. *Пусть система* (1.5.22) *обладает экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии, на орбите которой лежит частное решение укороченной системы, имеющее в параметрической форме следующий вид*:
$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}_0, \tau_0, \sigma), \quad t = T(\mathbf{y}_0, \tau_0, \sigma)$$
для некоторых $(\mathbf{y}_0, \tau_0) \in \Omega$. *Тогда полная система* (1.5.22) *имеет частное решение вида*
$$\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{X}\big(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}(\sigma), \tau_0, \sigma\big), \quad t(\sigma) = T\big(\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}(\sigma), \tau_0, \sigma\big),$$
где $\mathbf{u} = o(1)$ *при* $\sigma \to \chi \times \infty$.

Можно утверждать также, что существует l-параметрическое семейство таких решений, если характеристическое уравнение
$$\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0$$
имеет l корней, знаки вещественных частей которых совпадают со знаком $-\beta$, а вещественные части остальных нулевые или имеют обратный знак.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данную теорему.

Пример 1.5.3. Пусть релятивистская частица, масса покоя которой равна единице, совершает прямолинейное движение вдоль оси Ox под действием силы $f(x,t)$. Уравнение движения этой частицы имеют вид [78]
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - c^{-2}\dot{x}^2}}\right) = f(x,t), \tag{1.5.48}$$
где c — скорость света.

Известно, что при отсутствии внешних силовых полей ($f(x,t) \equiv 0$) уравнение (1.5.48) инвариантно относительно одномерной подгруппы группы Лоренца, представляющей собой группу гиперболических поворотов. Орбиты этой группы являются «псевдосферами» в метрике Минковского $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2$ и имеют вид

$$x = y \operatorname{ch} \sigma + c\tau \operatorname{sh} \sigma, \quad t = c^{-1} y \operatorname{sh} \sigma + \tau \operatorname{ch} \sigma, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty). \quad (1.5.49)$$

При помощи операции продолжения действия группы [94] нетрудно также подсчитать закон изменения скорости

$$\dot{x} = c \frac{y' + c \operatorname{th} \sigma}{y' \operatorname{th} \sigma + c}, \qquad (1.5.50)$$

где штрих означает производную по новому «времени» τ.

Из (1.5.50) видно, что при $\sigma \to \pm\infty$ скорость частицы стремится к скорости света.

Однако при отсутствии внешних полей единственная траектория, лежащая на орбитах этой группы, отвечает особому решению (1.5.48) $x = ct$. Найдем сначала нетривиальное силовое поле $f(x,t)$, такое, что уравнение (1.5.22) будет инвариантно относительно действия указанной подгруппы группы Лоренца и будет обладать частным (неособым) решением, лежащим на ее орбите. Это фактически означало бы разгон до скорости света при $t \to \infty$.

Введем обозначения $u = \dot{x}$, $v = y'$ и запишем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, для которой формулы (1.5.49), (1.5.50) давали бы общее решение.

$$\frac{dx}{d\sigma} = ct, \quad \frac{du}{d\sigma} = c^{-1}(c^2 - u^2), \quad \frac{dt}{d\sigma} = c^{-1}x.$$

Исследуемое уравнение второго порядка (1.5.48) перепишем в виде эквивалентной системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = (1 - c^{-2}u^2)^{3/2} f(x,t).$$

Введя обозначения

$$\mathbf{x} = (x, u), \quad \mathbf{f} = \big(u, (1 - c^{-2}u^2)^{3/2} f(x,t)\big),$$
$$\mathbf{g} = \big(ct, c^{-1}(c^2 - u^2)\big), \quad h = c^{-1}x,$$

попробуем разрешить систему уравнений (1.5.40).

Нетрудно заметить, что структура рассматриваемых уравнений такова, что

$$\big(D_t^{\mathbf{f}} h\big)(\mathbf{x}, t) = c^{-1} u,$$

независимо от конкретного вида $f(x, t)$, благодаря чему система (1.5.40) становится линейной.

Эта система состоит из двух уравнений, первое из которых удовлетворяется тождественно, а второе приводит к линейному уравнению в частных производных первого порядка на функцию $f(x, t)$:

$$c^2 t \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + x \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0.$$

Оно имеет очевидное решение

$$f_{\mathrm{q}}(x, t) = \phi(x^2 - c^2 t^2),$$

где ϕ — произвольная гладкая функция.

Интересно отметить, что найденная функция f_{q} является инвариантом группы гиперболических поворотов. Этой функции приписан индекс «q», показывающий инвариантность уравнения (1.5.48) относительно группы гиперболических поворотов.

Рассмотрим задачу существования траекторий точки, лежащих на орбитах рассматриваемой группы, таких что скорость точки за конечное время не достигает скорости света. Для этого необходимо разрешить систему алгебраических уравнений вида (1.5.42). После несложных вычислений приходим к уравнению

$$\xi_0 \phi(\xi_0^2) = c^2,$$

где введено обозначение $\xi_0 = y_0 \sqrt{1 - c^{-2} \nu_0^2}$, которое имеет действительный корень по крайней мере для положительных неубывающих на $[0, +\infty)$ функций ϕ.

Начальный момент времени τ_0 находится при этом по формуле

$$\tau_0 = c^{-2} y_0 \nu_0.$$

Итак, как было подчеркнуто ранее, траектории с найденными начальными условиями разгоняются до скорости света при $t \to \infty$.

Поставим теперь следующий вопрос: добавление каких возмущающих сил допускает существование траекторий с аналогичными асимптотическими свойствами?

Разложим функцию f в формальный ряд

$$f(x,t) = \sum_{m=0} f_{\mathrm{q}+\chi m}(x,t),$$

такой, что после преобразования (1.5.49) слагаемые в уравнении (1.5.48), соответствующие членам этого ряда, умножатся на $e^{-m\beta\sigma}$.

Для нахождения функций $f_{\mathrm{q}+\chi m}$ необходимо разрешить систему, аналогичную (1.5.45). Благодаря достаточно простой структуре исходного уравнения (1.5.48), соответствующая система становится линейной, которую в свою очередь можно расщепить на счетное число независимых подсистем. Левые и правые части первых уравнений являются тождественными нулями, а второе приводится к виду

$$c^2 t \frac{\partial}{\partial x} f_{\mathrm{q}+\chi m}(x,t) + x \frac{\partial}{\partial t} f_{\mathrm{q}+\chi m}(x,t) - m\beta c f_{\mathrm{q}+\chi m}(x,t) = 0.$$

Несложно заметить, что решениями этого уравнения будут функции вида

$$f_{\mathrm{q}+\chi m}(x,t) = \psi(x^2 - c^2t^2)\big(a_+(x+ct)^{m\beta} + a_-(x-ct)^{-m\beta}\big),$$

где ψ — произвольная функция, а a_+, a_- — произвольные постоянные.

Итак, уравнение движения частицы в построенном силовом поле будет иметь частное решения вида

$$x(\sigma) = \big(y_0 + z(\sigma)\big)\operatorname{ch}\sigma + c\tau_0 \operatorname{sh}\sigma, \quad t(\sigma) = c^{-1}\big(y_0 + z(\sigma)\big)\operatorname{sh}\sigma + \tau_0 \operatorname{ch}\sigma,$$

где функция $z(\sigma)$ допускает разложение в ряд

$$z(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\sigma) e^{-k\beta\sigma}.$$

Это решение обладает, очевидно, теми же асимптотическими свойствами, что и соответствующее частное решение укороченной системы.

Отметим, что решенная задача представляет собой простейший пример обратной задачи релятивистской механики.

Системы уравнений (1.5.40) и (1.5.45), которым должны удовлетворять правые части систем обыкновенных уравнений, обладающих заданной расширенной группой симметрии или экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии в неавтономном случае, существенно сложнее соответствующих систем (1.5.15), полученных для автономного случая.

В частности из-за их нелинейности невозможно получить цепочку независимых систем уравнений для каждой компоненты $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x},t)$. В предыдущем примере такое «расщепление» было осуществлено лишь благодаря весьма специфическому виду правой части исследуемого уравнения. В общем же случае на возможность такого расщепления можно надеяться лишь при следующих достаточно жестких ограничениях.

Пусть функция $h(\mathbf{x},t)$ представима в виде произведения

$$h(\mathbf{x},t)=\mu(t)H(\mathbf{x},t),$$

где $\mu(t)$ — некоторая гладкая функция времени t, а $H(\mathbf{x},t)$ является первым интегралом (возможно тривиальным) рассматриваемой (полной) системы. В этом случае вектор-функции $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющие цепочке уравнений

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m},\mathbf{g}\right](\mathbf{x},t)-\mu(t)H(\mathbf{x},t)\frac{\partial\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}}{\partial t}(\mathbf{x},t)+&\\ +\big(\mu(t)H(\mathbf{x},t)+m\beta\big)\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x},t)=0,\quad m=1,2,\ldots,&\qquad(1.5.51)\end{aligned}$$

удовлетворяют также системе (1.5.45).

Однако этот подход предусматривает знание *a priori* одного из интегралов полной системы, что, как правило, невозможно. Поэтому за редким исключением под действием расширенной группы симметрии время преобразуется независимо от фазовых переменных, т. е. предполагается, что $H(\mathbf{x},t)\equiv 0$. Если при этом искомые вектор-функции $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}$ считаются независящими от времени, то μ автоматически становится линейной функцией t ($\mu=\nu t+\mu_0$) и (1.5.51) переписывается в виде

$$\left[\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m},\mathbf{g}\right](\mathbf{x})=(\mu\beta+\nu)\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x})=0,\quad m=1,2,\ldots\qquad(1.5.52)$$

Это показывает, что $\mathbf{g}$ порождает обобщенную группу симметрии для всех векторных полей $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}$.

Отметим связь теории экспоненциально-асимптотических расширенных групп симметрии с полуквазиоднородными системами.

Пример 1.5.4. Изучавшийся в предыдущих параграфах метод построения частных решений полуквазиоднородных систем может трактоваться с изложенных выше теоретико-групповых позиций. Итак, снова рассмотрим некоторую полуквазиоднородную систему (1.1.3). Если в фуксовой системе уравнений (1.1.10) сделать очевидную замену независимой переменной $\sigma = -\ln\mu$, то эта система превратится в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = -\mathbf{G}\mathbf{x}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = t. \tag{1.5.53}$$

Само собой разумеется, что (1.5.53) порождает расширенную группу симметрии укороченной системы (1.1.9) и экспоненциально-асимптотическую расширенную группу симметрии полной системы (1.1.3). Частные решения укороченной системы, лежащие на орбите этой группы, следует искать в виде

$$\mathbf{x} = \exp(-\mathbf{G}\sigma)\mathbf{y}_0, \quad t = e^{\sigma}\tau_0,$$

что эквивалентно

$$\mathbf{x} = \left({}^{t}\!/_{\tau_0}\right)^{-\mathbf{G}} y_0.$$

Из (1.5.42) следует, что величины $\mathbf{y}_0$ и τ_0 должны удовлетворять равенству

$$\tau_0 \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0) = -\mathbf{G}\mathbf{y}_0, \tag{1.5.54}$$

аналогичному (1.1.13).

Замена типа (1.5.35), порожденная системой линейных уравнений (1.5.53), переводит систему (1.1.3) в систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = \mathbf{G}\mathbf{y} + \tau \sum_{m=0} e^{-m\beta\sigma} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{y}, \tau). \tag{1.5.55}$$

Отсюда, в частности, видно, что при выполнении (1.5.54) для некоторых фиксированных $(\mathbf{y}_0, \tau_0) \in \Omega$ матрица $\mathbf{K}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \tau_0 d_{\mathbf{y}} \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0, \tau_0).$$

Она совпадает с матрицей Ковалевской, если положить $\tau_0 = \gamma$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0^{\gamma}$.

Система (1.5.55) имеет частное решение $\mathbf{y}(\sigma)$, представимое в виде ряда

$$\mathbf{y}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k(\sigma) e^{-k\beta\sigma},$$

аналогичного (1.1.19).

Это означает, что исходная система (1.1.3) имеет решение в виде ряда (1.1.16).

При помощи теории экспоненциально-асимптотических групп симметрии можно строить также решения, стремящиеся к особым точкам при неограниченном возрастании или убывании независимой переменной и представимые в виде рядов, которые являются гибридом рядов Ляпунова [81], содержащих экспоненты, и рядов (1.1.16).

Пример 1.5.5. Рассмотрим двумерную систему уравнений

$$\dot{x} = -\left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m y^m\right) x, \quad \dot{y} = -y^2. \tag{1.5.56}$$

Она имеет очевидное семейство решений, стремящихся к $x = y = 0$ при $t \to +\infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-t} \prod_{m=2}^{\infty} \exp\left(\frac{a_m}{m-1} t^{1-m}\right) = ce^{-t}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k t^{-k}\right), \\ y(t) &= t^{-1}, \end{aligned} \tag{1.5.57}$$

где коэффициенты x_k полиномиально зависят от a_m.

Рассмотрим группу преобразований трехмерного расширенного фазового пространства, порожденную следующей системой уравнений

$$\frac{dx}{d\sigma} = -tx, \quad \frac{dy}{d\sigma} = -y, \quad \frac{dt}{d\sigma} = t. \tag{1.5.58}$$

Система (1.5.58) легко интегрируется. Порождаемый ею поток имеет вид:

$$x = \exp\big(\tau(1 - e^{\sigma})\big)\xi, \quad y = e^{-\sigma}\eta, \quad t = e^{\sigma}\tau. \tag{1.5.59}$$

Рассмотрим замену переменных (1.5.59). Эта замена переводит (1.5.56) к виду

$$\xi' = -\left(1 + \sum_{m=2} a - me^{(1-m)\sigma}\eta^m\right)\xi, \quad \eta' = -\eta^2, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}.$$

Следовательно, поток (1.5.59) системы дифференциальных уравнений (1.5.58) является экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии системы (1.5.56). Укороченная система

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y^2$$

имеет однопараметрическое семейство частных решений

$$x = ce^{\tau_0 - t}, \quad y = y_0(t/\tau_0)^{-1}, \quad y_0 = \tau_0^{-1},$$

где c — параметр семейства, а τ_0 фиксировано, лежащее на орбитах группы (1.5.59).

Таким образом, согласно теореме 1.5.2, семейство частных решений (1.5.57) системы (1.5.56) порождается группой (1.5.59).

Более подробно на анализе гибридных рядов, содержащих отрицательные степени e^t и t, мы остановимся в главе 3.

Глава 2
Критический случай чисто мнимых корней

1. Асимптотические решения автономных систем дифференциальных уравнений в критическом случае m пар чисто мнимых и $n - 2m$ нулевых корней характеристического уравнения

В предыдущей главе изучались асимптотики решений гладких систем дифференциальных уравнений при $t \to \pm 0$, либо при $t \to \pm\infty$. При этом специально не оговаривалось, что искомые решения должны находиться в окрестности особой точки. В этой главе мы подробно рассмотрим вопрос о существовании решений, стремящихся к особой точке при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

Главным объектом исследования в этом параграфе будет бесконечно гладкая система дифференциальных уравнений, для которой начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является особой точкой, а правые части раскладываются в формальные ряды Маклорена:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.1}$$

Для непосредственного применения к задаче поиска асимптотических решений техники, разработанной в предыдущей главе, фактически требовалось, чтобы все корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, где $\mathbf{A} = d\mathbf{f}(0)$ — матрица Якоби векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, вычисленная в особой точке $\mathbf{x} = 0$, были нулевыми. Мы заменим это требование на более естественное. Если рассмотреть систему на инвариантном центральном многообразии, то характеристическое уравнение для редуцированной системы будет иметь лишь чисто мнимые корни, среди которых могут быть, разумеется, и нулевые. Поэтому мы будем предполагать что характеристическое уравнение системы (2.1.1) имеет m пар чисто мнимых корней, а остальные $n - 2m$ корней — нулевые.

Далее нам понадобятся некоторые факты из теории нормальных форм Пуанкаре [4, 154]. Рассмотрим некоторую формальную замену координат $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, представленную при помощи формальных рядов Маклорена в окрестности $\mathbf{y} = 0$ и не меняющую линейную часть:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{Y}_m(\mathbf{y}), \tag{2.1.2}$$

где $\mathbf{Y}_m$ — однородные вектор-функции степени m.

После замены (2.1.2) рассматриваемая система (2.1.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{g}(0) = 0, \quad d\mathbf{g}(0) = \mathbf{A}. \tag{2.1.3}$$

Замена (2.1.1) подбирается таким образом, чтобы система (2.1.3) имела наиболее простой вид.

Представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде суммы двух матриц $\mathbf{D} + \mathbf{J}$, где матрица $\mathbf{D}$ диагонализируема, а матрица $\mathbf{J}$ эквивалентна блочно-жордановой матрице с нулевой диагональю. Правую часть системы уравнений (2.1.3) запишем так:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}\mathbf{y} + \ldots,$$

где многоточие означает совокупность нелинейных членов.

Определение 2.1.1. Говорят, что система (2.1.3) имеет *нормальную форму Пуанкаре*, если для любых $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$ имеет место формальное равенство

$$\exp(-\mathbf{D}\sigma)\mathbf{h}\big(\exp(\mathbf{D}\sigma)\mathbf{z}\big) = \mathbf{h}(\mathbf{z}). \tag{2.1.4}$$

Формула (2.1.4) чрезвычайно полезна в приложениях, но проверка с ее помощью нормальности системы (2.1.3) — дело весьма затруднительное. Поэтому на практике обычно пользуются другим приемом. Соотношение (2.1.4) означает, что (2.1.3) имеет группу симметрии, порожденную линейной системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{y}. \tag{2.1.5}$$

Если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, а следовательно и $\mathbf{D}$, чисто мнимые, то (2.1.5) порождает некоторую группу вращений фазового пространства.

Отсюда сразу же вытекает правило проверки нормальности: векторное поле $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ должно удовлетворять системе уравнений

$$[\mathbf{D}\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})] \equiv 0. \tag{2.1.6}$$

Однако и уравнения (2.1.6) не дают наглядного представления о виде правых частей системы, записанной в нормальной форме.

Предположим, что матрица $\mathbf{D}$ приведена к диагональному виду

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

При этом, вообще говоря, следует учитывать, что в результате такого приведения правые части (2.1.1) и (2.1.3) могут стать комплексными. Рассмотрим разложение некоторой j-й компоненты векторного поля $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ в ряд Маклорена

$$h^j = \sum_{p_1,\ldots,p_n} h^j_{p_1,\ldots,p_n} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n}.$$

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Под модулем некоторого вектора будем понимать величину

$$|\mathbf{b}| = |b_1| + \ldots + |b_n|.$$

Определение 2.1.2. Моном $h^j_{p_1,\ldots,p_n} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n}$, $|\mathbf{p}| \geqslant 2$ назовем *резонансным*, если

$$\lambda_j = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \rangle. \tag{2.1.7}$$

Соотношение (2.1.7) называется резонансом порядка $p = |\mathbf{p}|$.

Определение 2.1.3. Говорят, что система (2.1.3) записана в нормальной форме Пуанкаре, если разложение нелинейной части векторного поля $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ в ряд Маклорена содержит только резонансные мономы.

Можно показать, что определения 2.1.1 и 2.1.3 эквивалентны [4, 154]. Имеет место следующий важный результат [4, 154].

Теорема 2.1.1 (Пуанкаре–Дюлака). *При помощи формального преобразования* (2.1.2) *систему* (2.1.1) *всегда можно привести к нормальной форме Пуанкаре* (2.1.3).

Приведение системы к нормальной форме сильно упрощает исследование поведения ее траекторий в окрестности особой точки, по крайней мере, на формальном уровне. Движения системы, записанной в нормальной форме, допускают формальное разделение, а именно: если $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, то решения системы (2.1.3) получаются при помощи суперпозиции решений линеаризованной системы и системы, содержащей только нелинейные члены. Более точно этот результат содержится в лемме о разделении движений.

Лемма 2.1.1. [89] *Линейная замена переменных*

$$\mathbf{y} = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{z} \tag{2.1.8}$$

переводит нормализованную систему уравнений (2.1.3) *в систему*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}). \tag{2.1.9}$$

Доказательство. Эта лемма является прямым следствием леммы 1.5.4.

Замечание 2.1.1. Матрица $\mathbf{J}$, являющаяся матрицей Якоби правой части системы (2.1.9), вычисленной в точке $\mathbf{z} = 0$, подобна блочно-жордановой матрице с нулевой диагональю. Если не все компоненты этой матрицы равны нулю, то (2.1.9) допускает дальнейшее упрощение, связанное с приведением к так называемой нормальной форме Белицкого [12]. Однако, далее для получения условий существования асимптотических решений в конкретных примерах нам будет достаточно воспользоваться лишь нормальной формой Пуанкаре, поэтому теорию нормальной формы Белицкого мы здесь излагать не будем.

Изложенная теория нормальных форм применима, разумеется, не только в случае всех чисто мнимых корней характеристического уравнения. Однако, наиболее эффективно эта теория работает в критических случаях, например, при изучении редуцированной на центральное многообразие системы. Система (2.1.9) имеет вид, пригодный для исследования при помощи методов, изложенных в предыдущей главе, поскольку характеристическое уравнение ее линейной части имеет только нулевые корни. Поэтому с формальной точки зрения программа поиска асимптотического решения исходной системы (2.1.1) должна заключаться в нахождении подходящей группы квазиоднородных растяжений, на орбитах которой лежало бы частное асимптотическое решение укороченной при помощи введенной структуры системы. Если такая процедура увенчается успехом, то решение полной системы (2.1.9) можно записать в привычном виде, аналогичном (1.1.16):

$$\mathbf{z}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}.$$

Поскольку все собственные значения матрицы $\mathbf{D}$ лежат на мнимой оси, преобразование (2.1.8) приводит лишь к «закручиванию» построенного решения, не меняя порядка его стремления к особой точке. Асимптотическое решение нормализованной системы (2.1.3) можно было бы тогда записать в виде

$$\mathbf{y}(t) = \exp\big(\mathbf{D}t - \mathbf{G}\ln(\gamma t)\big) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}.$$

Однако, в реальности ситуация выглядит гораздо сложнее. В типичном случае ряды Маклорена (2.1.2) сходятся в некоторой окрестности $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, по крайней мере, при отсутствии резонансов (2.1.7) и при выполнении некоторых дополнительных диофантовых условий на собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ [4, 22, 23]. Имеется достаточно много результатов, показывающих, что при нарушении этих условий нормализующее преобразование может расходиться [47, 48]. Поэтому правые части систем (2.1.3) и (2.1.9) являются лишь формальными, вероятнее всего расходящимися, рядами. Хотя в соответствии с теоремой Бореля [90] существуют гладкие системы дифференциальных уравнений, для которых эти ряды будут рядами Маклорена их правых частей, перенос свойств решений этих систем на исходную систему (2.1.1) нуждается в дополнительном обосновании.

Тем не менее, верно следующее утверждение, обобщающее теорему из [118].

Теорема 2.1.2. *Пусть все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *чисто мнимые или нулевые, и пусть система* (2.1.9) *положительно полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой вещественной матрицей* $\mathbf{G}$, *собственные числа которой имеют положительные действительные части. Пусть квазиоднородное укорочение*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}) \tag{2.1.10}$$

системы (2.1.9) *таково, что найдутся вектор* $\mathbf{z}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}_0^\gamma \neq 0$ *и число* $\gamma = \pm 1$, *удовлетворяющие алгебраической системе уравнений*

$$-\gamma \mathbf{G} \mathbf{z}_0^\gamma = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^\gamma). \tag{2.1.11}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1.1) *имеет асимптотическое решение* $\mathbf{x}(t) \to 0$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Доказательство. Приведем сначала систему (2.1.1) к формальной нормальной форме (2.1.3). Рассмотрим укороченную систему (2.1.10). В теории критических случаев такое укорочение нормальной формы тоже часто называют модельной системой. Очевидно, что для выделения модельной системы достаточно знать лишь конечное число членов в разложении Маклорена $\mathbf{h}(y)$ и, следовательно, лишь конечное число форм $\mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_M$ в нормализующих рядах (2.1.2).

Теперь вместо полной нормализации проведем частичную по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{M_*} \mathbf{Y}_m(\mathbf{y}),$$

где $M_* > M$ следует выбрать достаточно большим.

Конечно, это преобразование будет аналитическим в некоторой окрестности особой точки $\mathbf{y} = 0$. После замены (2.1.8) исследуемая система уравнений примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, t), \tag{2.1.12}$$

где правая часть представима в виде

$$\mathbf{h}(\mathbf{z},t) = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}) + \mathbf{h}^{*}(\mathbf{z}) + \mathbf{h}^{**}(\mathbf{z},t),$$

обсуждавшемся в замечании 1.3.4. Так как корни системы линейного приближения чисто мнимые, то не «укладывающееся» в квазиоднородную шкалу слагаемое $\mathbf{h}^{**}(\mathbf{z},t)$ зависит от времени периодически или квазипериодически. Таким образом, к системе (2.1.12) применимы теоремы 1.3.2 и 1.3.3. Поскольку укороченная система автономна и имеет место равенство (2.1.11), то линейная система (1.3.6) будет также автономной и, следовательно, правильной. Следовательно, система уравнений (2.1.12) имеет частное решение вида

$$\mathbf{z}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\big(\mathbf{z}_0^{\gamma} + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to \gamma \times \infty.$$

Поскольку вещественные части всех собственных чисел матрицы $\mathbf{G}$ строго положительны и $\chi = 1$, то $\mathbf{z}(t) \to 0$ при $t \to \gamma \times \infty$.

Возвращаясь к исходным переменным $\mathbf{x}$, получим требуемое утверждение.

Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет важное приложение в теории устойчивости движения.

Теорема 2.1.3. *Пусть система первого приближения для* (2.1.1) *имеет только чисто мнимые или нулевые корни, а нормальная форма системы* (2.1.1) *такова, что полученная из нее путем отбрасывания диагонализируемых линейных членов система положительно полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой некоторой матрицей* $\mathbf{G}$*, собственные числа которой имеют только положительные вещественные части. Если для векторного поля укорочения* $\mathbf{h}_{\mathrm{q}}$ *существует вектор* $\mathbf{z}_0^{-} \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{z}_0^{-} \neq 0$ *такой, что*

$$\mathbf{G}\mathbf{z}_0^{-} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^{-})$$

(*т. е.* $\gamma = -1$)*, то особая точка системы* (2.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчива.*

Доказательство следует из факта существования частного решения системы (2.1.1) $\mathbf{x}(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Итак, мы снова сталкиваемся с проблемой поиска ненулевых собственных векторов квазиоднородных векторных полей. Их существование во многом зависит от способа выбора квазиоднородной структуры. Во-первых, одна и та же система уравнений может быть полуквазиоднородной относительно разных структур, и как это уже было видно на конкретных примерах, часто не все соответствующие укороченные системы имеют необходимые частные решения. Во-вторых, одна и та же модельная система может задаваться разными структурами, для которых соответствующие группы преобразований имеют различные орбиты (см. пример 1.1.2). При этом частное решение с интересующей нас асимптотикой может лежать на орбите лишь одной из групп преобразований. Следует отметить, что наиболее естественным способом нахождения квазиоднородных структур является анализ многогранников Ньютона. Каким же образом следует поступить, если «подозрительное» укорочение, полученное при помощи этой техники, не имеет собственных векторов? Один из возможных рецептов состоит в попытке построить частное решение данной модельной системы в виде (1.3.1) и затем в применении теоремы 1.3.2. Но эта задача сводится к нахождению ограниченного частного решения $\mathbf{x}_0^\gamma(\cdot)$ системы дифференциальных уравнений (1.3.5), которое может не интегрироваться в квадратурах. Для того, чтобы оставаться в рамках решения систем алгебраических, а не дифференциальных уравнений, следует попытаться найти другую структуру, задающую то же самое укорочение и рассмотреть задачу построения собственных векторов относительно этой новой структуры. Аппарат приведения к нормальной форме указывает конкретный способ поиска таких альтернативных квазиоднородных структур. Этот способ базируется на следующем утверждении.

Лемма 2.1.2. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида* (2.1.9)*, полуквазиоднородную относительно структуры, порожденной некоторой матрицей* $\mathbf{G}$*, и рассмотрим разложение ее правой части в ряд по квазиоднородным формам*

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \sum_{m=0} \mathbf{h}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{z}).$$

Пусть линейная система дифференциальных уравнений вида (2.1.5) *порождает группу симметрии системы* (2.1.9)*, матрицы* $\mathbf{G}$ *и* $\mathbf{D}$ *коммутируют* ($\mathbf{GD} = \mathbf{DG}$)*. Тогда* (2.1.9) *является полуквазиоднородной относительно набора структур, порожденных однопараметрическим семейством матриц*

$$\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \delta\mathbf{D}, \tag{2.1.13}$$

и ее правая часть имеет то же самое разложение.

Доказательство. Поскольку (2.1.9) инвариантна относительно действия потока системы (2.1.5), то имеет место следующее тождество

$$\exp(-\mathbf{D}\sigma)\mathbf{h}\big(\exp(\mathbf{D}\sigma)\mathbf{z}\big) = \mathbf{h}(\mathbf{z}).$$

Положим $\mu = e^{\sigma/\delta}$. Используя (1.1.17) и тот факт, что экспонента суммы коммутирующих матриц равна произведению их экспонент, получим

$$\mathbf{h}\big(\mu^{\mathbf{G}_\delta}\mathbf{z}\big) = \mathbf{h}\big(\exp(\mathbf{D}\sigma)\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}\big) = \exp(\mathbf{D}\sigma)\sum_{m=0}\mathbf{h}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}) =$$

$$= \mu^{\delta\mathbf{D}}\sum_{m=0}\mu^{\mathbf{G}+(m\beta+1)\mathbf{E}}\mathbf{h}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{z}) = \mu^{\mathbf{G}_\delta+\mathbf{E}}\sum_{m=0}\mu^{m\beta}\mathbf{h}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{z}).$$

Лемма доказана.

Если система (2.1.9) имеет $n_0 < n$ независимых групп симметрии, порождаемых системами линейных дифференциальных уравнений вида (2.1.5) с матрицами $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_{n_0}$, то матрицу, порождающую квазиоднородную структуру, можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \sum_{j=1}^{n_0}\delta_j\mathbf{D}_j. \tag{2.1.14}$$

Здесь $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{n_0})$ — набор произвольных параметров.

Итак, поскольку диагонализируемая часть линеаризованной системы коммутирует с оставшимися членами нормальной формы, подходящую квазиоднородную шкалу для системы (2.1.9) можно подбирать при помощи семейства матриц (2.1.13), где $\mathbf{D}$ — диагонализируемая часть матрицы системы первого приближения.

Это обстоятельство существенно расширяет возможности поиска частных асимптотических решений модельной системы. Предположим, что не существует такого действительного ненулевого вектора $\mathbf{z}_0^\gamma$, удовлетворяющего (2.1.11) при $\gamma = \pm 1$, однако для некоторого $\delta \neq 0$ можно подобрать ненулевой вектор $\mathbf{z}_0^\gamma$ такой, что

$$-\gamma(\mathbf{G} + \delta\mathbf{D})\mathbf{z}_0^\gamma = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^\gamma). \tag{2.1.15}$$

Это означает, что вместо решений простого вида

$$\mathbf{z}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{z}_0^\gamma$$

мы будем искать частные решения модельной системы (2.1.10) в более сложной форме

$$\mathbf{z}^\gamma(t) = \exp\big(\delta\mathbf{D}\ln t\big)(\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{z}_0^\gamma.$$

Поскольку все собственные значения матрицы $\mathbf{D}$ — чисто мнимые, появление в качестве сомножителя матрицы $\exp(\delta\mathbf{D}\ln t)$ приводит к «закручиванию» квазиоднородного луча.

В качестве примеров применения теорем 2.1.2 и 2.1.3 рассмотрим задачу об устойчивости особых точек и существовании асимптотических решений общих четырехмерных систем дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения системы первого приближения. Эта задача достаточно типична. Ее *коразмерность* без дополнительных вырождений равна двум: рассматриваемый критический случай реализуется в системах уравнений, правые части которых могут зависеть в случае общего положения лишь от двух параметров (подробности см. в монографии [125]). Мы покажем, что существование «закрученных» лучей при неустойчивости является в рассматриваемой задаче случаем общего положения.

Итак, пусть корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,$$

где ω_1, ω_2 — частоты малых колебаний.

Без ограничения общности будем считать, что диагонализируемая часть матрицы первого приближения приведена к блочному виду:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.1.1. Две пары чисто мнимых корней при отсутствии резонанса между частотами (задача Каменкова [49]). Пусть частоты ω_1, ω_2 не связаны никакими резонансными соотношениями вплоть до третьего порядка.

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_1 \neq 2\omega_2, \quad \omega_1 \neq 3\omega_2.$$

Из этого следует, что в системе отсутствуют резонансы второго порядка между *корнями характеристического уравнения системы первого приближения* и посредством нормализующего преобразования квадратичные члены могут быть «убиты».

В фазовом пространстве системы введем декартовы координаты $\mathbf{z} = (x, u, y, v)$. Следуя [125], выпишем кубическую модельную систему для данной задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + u^2)(a_{11}x - b_{11}u) + (y^2 + v^2)(a_{12}x - b_{12}u), \\ \dot{u} &= (x^2 + u^2)(a_{11}u + b_{11}x) + (y^2 + v^2)(a_{12}u - b_{12}x), \\ \dot{y} &= (x^2 + u^2)(a_{21}y - b_{21}v) + (y^2 + v^2)(a_{22}y - b_{22}v), \\ \dot{v} &= (x^2 + u^2)(a_{21}v + b_{21}y) + (y^2 + v^2)(a_{22}v + b_{22}u). \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

На данном примере мы очень кратко остановимся на принципах построения модельных систем. Можно показать, что векторные поля (2.1.16) (и только они) принадлежат ядру линейного оператора коммутирования с линейным полем $\mathbf{Dz}$ в конечномерном пространстве кубических векторных полей. Задача явного описания ядра данного оператора должна решаться отдельно в каждом конкретном случае. Для решения этой задачи вещественные декартовы координаты, как правило, не очень удобны, и вместо них обычно используют либо комплексно-сопряженные декартовы координаты, в которых матрица $\mathbf{D}$ имеет диагональную форму, либо полярные. Чтобы избежать выписывания утомительных формул пересчета из одних координатных систем в другие, далее мы будем приводить лишь окончательный результат, опуская вычислительные подробности.

Очевидно, что модельная система имеет две независимые группы симметрии, порождаемые линейными векторными полями с матрицами

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем искать условия неустойчивости исходной системы типа (2.1.1) и, следовательно, условия существования асимптотических к ее особой точке $x = u = y = v = 0$ при $t \to -\infty$ решений в терминах коэффициентов модельной системы. В [125] выписаны условия асимптотической устойчивости: должны *одновременно* выполняться следующие условия:

$$1)\ a_{11} < 0, \quad 2)\ a_{22} < 0,$$
$$3)\ \text{ если } a_{12} > 0 \text{ и } a_{21} > 0, \text{ то } \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

При этом все решения исходной системы, начинающиеся в некоторой малой окрестности особой точки, являются асимптотическими при $t \to +\infty$. Этот результат получен при помощи построения функций Ляпунова.

Покажем, что при (строгом) нарушении знака по крайней мере в одном из условий 1)–3) модельная система (2.1.16) будет иметь растущие решения типа закрученных прямолинейных лучей. При этом можно показать, что в общей ситуации (2.1.16) не имеет частных решений в виде *прямолинейных* лучей. Следовательно, правая часть (2.1.16), будучи *однородным* векторным полем, должна иметь ненулевой собственный вектор с координатами $(x_0^- u_0^-, y_0^-, v_0^-)$ при $\gamma = -1$ относительно матрицы типа (2.1.14):

$$\mathbf{G}_\delta = {}^1\!/_2\mathbf{E} + \delta_1\mathbf{D}_1 + \delta_2\mathbf{D}_2. \tag{2.1.17}$$

Поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей, система (2.1.16) квазиоднородна относительно структур, порождаемых матрицами $\mathbf{G}_\delta$.

Существование такого рода решений модельной системы влечет за собой неустойчивость исходной системы.

1) Пусть $a_{11} > 0$. Тогда (2.1.16) имеет *однопараметрическое* семейство частных решений вида:

$$x^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(x_0^- \cos\big(\delta\omega_1 \ln(-t)\big) - u_0^- \sin\big(\delta\omega_1 \ln(-t)\big)\Big),$$

$$u^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(x_0^- \sin\big(\delta\omega_1 \ln(-t)\big) + u_0^- \cos\big(\delta\omega_1 \ln(-t)\big)\Big),$$

$$y^-(t) = 0, \quad v^-(t) = 0,$$

где

$$x_0^-(t) = \rho\cos\theta, \quad u_0^-(t) = \rho\sin\theta, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2a_{11}}},$$

θ — параметр семейства, являются решениями системы алгебраических уравнений

$$-\begin{pmatrix} 1/2 & -\delta\omega_1 \\ \delta\omega_1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^- \\ u_0^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \big((x_0^-)^2 + (u_0^-)^2\big) & \big(a_{11}x_0^- - b_{11}u_0^-\big) \\ \big((x_0^-)^2 + (u_0^-)^2\big) & \big(a_{11}u_0^- + b_{11}x_0^-\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.18}$$

при $\delta = \dfrac{b_{11}}{2a_{11}\omega_1}$.

Система (2.1.18) является аналогом системы (2.1.15).

Здесь мы положили в формуле (2.1.17) $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, т. е. матрицу требуемого квазиоднородного укорочения ищем в виде (2.1.13). Поскольку диагонализируемая матрица $\mathbf{D}$ является матрицей системы линейного приближения, полученная из формальной нормальной формы, система типа (2.1.9) для рассматриваемого случая является полуквазиоднородной относительно структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}_\delta$. Существование решений укороченной системы указанного вида влечет за собой существование частных решений исходной системы вида (2.1.1), асимптотических к особой точке при $t \to -\infty$, что означает неустойчивость.

2) Случай $a_{22} > 0$ рассматривается аналогично. Система (2.1.16) имеет семейство частных решений:

$$x^-(t) = 0, \quad u^-(t) = 0,$$

$$y^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(y_0^- \cos\big(\delta\omega_2 \ln(-t)\big) - v_0^- \sin\big(\delta\omega_2 \ln(-t)\big)\Big),$$

$$v^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(y_0^- \sin\big(\delta\omega_2 \ln(-t)\big) + v_0^- \cos\big(\delta\omega_2 \ln(-t)\big)\Big),$$

где величины

$$y_0^-(t) = \rho\cos\theta, \quad v_0^-(t) = \rho\sin\theta, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2a_{22}}},$$

θ — параметр семейства, удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$-\begin{pmatrix} 1/2 & -\delta\omega_2 \\ \delta\omega_2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^- \\ u_0^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \big((y_0^-)^2 + (v_0^-)^2\big) & \big(a_{22}y_0^- - b_{22}v_0^-\big) \\ \big((y_0^-)^2 + (v_0^-)^2\big) & \big(a_{22}v_0^- + b_{22}y_0^-\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.19}$$

В системе (2.1.19), также являющейся аналогом (2.1.15), следует положить $\delta = \dfrac{b_{22}}{2a_{22}\omega_2}$.

Для доказательства существования асимптотических решений в случаях 1) и 2) мы воспользовались квазиоднородной структурой в соответствии с рецептом леммы 2.1.2. Можно было поступить и по-другому. Найденное нами асимптотическое решение модельной системы имеет, на самом деле, вид (1.3.1), где $\mathbf{G} = 1/2\mathbf{E}$. Поэтому в этом случае мы могли бы применить теорему 1.3.2. Система (1.3.8) будет в рассматриваемом случае правильной, т. к. ее коэффициенты периодически зависят от логарифмического времени τ.

3) Пусть теперь $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$, но $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$. Этот случай существенно отличается от предыдущих. Система (2.1.16) обладает двухпараметрическим семейством частных решений вида:

$$x^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(x_0^-\cos\big(\delta_1\omega_1\ln(-t)\big) - u_0^-\sin\big(\delta_1\omega_1\ln(-t)\big)\Big),$$

$$u^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(x_0^-\sin\big(\delta_1\omega_1\ln(-t)\big) + u_0^-\cos\big(\delta_1\omega_1\ln(-t)\big)\Big),$$

$$y^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(y_0^-\cos\big(\delta_2\omega_2\ln(-t)\big) - v_0^-\sin\big(\delta_2\omega_2\ln(-t)\big)\Big),$$

$$v^-(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\Big(y_0^-\sin\big(\delta_2\omega_2\ln(-t)\big) + v_0^-\cos\big(\delta_2\omega_2\ln(-t)\big)\Big),$$

где

$$x_0^- = \rho\cos\theta, \quad u_0^- = \rho\sin\theta, \quad v_0^- = v\rho\sin\varphi, \quad y_0^- = v\rho\cos\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{\frac{a_{22} - a_{12}}{2\Delta}}, \quad v = \sqrt{\frac{a_{11} - a_{21}}{a_{22} - a_{12}}},$$

$$\delta_1 = \frac{(b_{11} + v^2 b_{12})\rho^2}{\omega_1}, \quad \delta_2 = \frac{(b_{21} + v^2 b_{22})\rho^2}{\omega_2}.$$

Здесь θ, φ — параметры семейства. Стоит отметить, что величины ρ и v вещественны (в силу принятых соглашений о коэффициентах a_{ij}).

Мы не будем выписывать систему алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять величины $x_0^-, u_0^-, y_0^-, v_0^-$ из-за громоздкости.

Как уже отмечалось, модельная система (2.1.16) квазиоднородна относительно структур, порожденных семейством матриц (2.1.17). Указанное выше двухпараметрическое семейство частных решений лежит на орбитах соответствующей группы преобразований. Однако, «полная» система типа (2.1.9), полученная из нормальной формы при помощи отбрасывания линейных членов, не является полуквазиоднородной относительно этого семейства структур. Наличие резонансов высших порядков между частотами

$$\omega_1 = p\omega_2, \quad p \geqslant 4$$

может привести к тому, что линейные векторные поля с матрицами $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ уже не будут порождать групп симметрии *полной* системы. Поэтому для доказательства существования асимптотического при $t \to -\infty$ решения исходной системы следует применить результат типа теоремы 1.3.2. В рассматриваемом случае система вида (2.1.12) будет полу-(квази)однородной относительно структуры, порожденной матрицей ${}^1\!/_2\mathbf{E}$. Указанное выше решение будет иметь вид (1.3.1), причем линейная система (1.3.8) также будет правильной.

Пример 2.1.2. Две пары чисто мнимых корней при резонансе $1:2$ между частотами. Пусть ω_1, ω_2 связаны резонансным соотношением

$$\omega_1 = 2\omega_2.$$

Эта задача имеет коразмерность 3. В этом случае все квадратичные члены уже не могут быть убиты посредством нормализующей замены. Обозначив $\mathbf{z} = (x, y, u, v)$ и пользуясь результатами из [125], выпишем модельную систему, которая будет в данном случае квадратичной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(y^2 - v^2) - 2b_1yv, & \dot{u} &= b_1(y^2 - v^2) + 2a_1yv, \\ \dot{y} &= a_2(xy + uv) - b_2(uy - xv), & \dot{v} &= 2_2(xy + uv) + a_2(uy - xv). \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Эта система является однородной системой с квадратичными правыми частями. Если бы особая точка модельной системы (2.1.20) $x = u = y = v = 0$ была бы изолированной, то эта система имела бы прямолинейные частные решения в соответствии с леммой 1.1.1. Однако (2.1.20) имеет двумерное многообразие особых точек $y = v = 0$. Поэтому следует искать асимптотические решения (2.1.20) в виде *закрученных* лучей.

В монографии [125] показано, что в общей ситуации система (2.1.20) обладает двумя *однопараметрическими* семействами частных решений вида

$$
\begin{aligned}
x^-(t) &= (-t)^{-1}\Big(x_0^- \cos\big(2\delta\omega\ln(-t)\big) - u_0^- \sin\big(2\delta\omega\ln(-t)\big)\Big),\\
u^-(t) &= (-t)^{-1}\Big(x_0^- \sin\big(2\delta\omega\ln(-t)\big) + u_0^- \cos\big(2\delta\omega\ln(-t)\big)\Big),\\
y^-(t) &= (-t)^{-1}\Big(y_0^- \cos\big(2\delta\omega\ln(-t)\big) - v_0^- \sin\big(2\delta\omega\ln(-t)\big)\Big),\\
v^-(t) &= (-t)^{-1}\Big(y_0^- \sin\big(2\delta\omega\ln(-t)\big) + v_0^- \cos\big(2\delta\omega\ln(-t)\big)\Big),
\end{aligned}
$$

где

$$
x_0^- = \rho\cos\theta, \quad u_0^- = \rho\sin\theta, \quad y_0^- = v\rho\cos\varphi, \quad v_0^- = v\rho\sin\varphi, \quad \omega = \omega_2.
$$

При этом резонансная фаза $\psi = \theta - 2\varphi$ остается постоянной, поэтому за параметр семейств может быть принята как величина θ так и величина φ. Приведем значения постоянных ρ, ψ, v, δ:

$$
\rho = v^{-1}\sqrt{\frac{3\delta\omega}{l_1 l_2 \sin\alpha}}, \quad \psi = \pi k - \alpha_2 + \operatorname{arctg}(\delta\omega), \quad k = 0, 1,
$$

$$
v = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}\big(\sqrt{8+\cos^2\alpha} - \cos\alpha\big)}, \quad \delta = \frac{1}{4\omega\sin\alpha}\big(\sqrt{8+\cos^2\alpha} - 3\cos\alpha\big),
$$

где введены обозначения: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, (l_1, α_1), (l_2, α_2) — полярные координаты пар (a_1, b_1), (a_2, b_2):

$$
a_i = l_i\cos\alpha_1, \quad b_i = l_i\sin\alpha_1, \quad i = 1, 2.
$$

Из выписанных соотношений следует, что такое частное решение существует, если

$$
l_1 \neq 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \alpha \neq \pi.
$$

Система типа (2.1.15), которой должны удовлетворять величины x_0^-, u_0^-, y_0^-, v_0^- достаточно громоздка, поэтому мы не будем выписывать ее явно.

Случаи $\alpha = 0, \pi$ должны быть, вообще говоря, рассмотрены особо. При $\alpha = 0$ построенные два семейства *закрученных* решений сливаются в одно *прямолинейное*:

$$
\rho = \frac{1}{l_2}, \quad \psi = \pi - \alpha_2, \quad v = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}, \quad \delta = 0.
$$

При $\alpha = 0$ система (2.1.20) не имеет асимптотических при $t \to -\infty$ решений.

Итак, при выполнении указанных условий модельная система допускает асимптотические к особой точке при $t \to -\infty$ решения, которые лежат на орбитах группы преобразований расширенного фазового пространства, задаваемой при помощи линейной системы уравнений вида (1.1.10), где $\mathbf{G} = \mathbf{G}_\delta = \mathbf{E} + \delta\mathbf{D}$. Система (2.1.20) квазиоднородна относительно данной структуры, а соответствующая *полная* система полуквазиоднородна. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 2.1.3 и доказать неустойчивость особой точки исходной системы.

Пример 2.1.3. Резонанс частот 1: 1 в случае непростых элементарных делителей. Как и ранее через $\mathbf{z}$ обозначим четырехмерный вектор (x, u, y, v). В монографии [125] выписана модельная система для данного случая. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{u} &= v, \\ \dot{y} &= (ax - bu)(x^2 + u^2), & \dot{v} &= (ax + bu)(x^2 + u^2) \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Система (2.1.21) является, очевидно, квазиоднородной с матрицей $\mathbf{G} = \operatorname{diag}(1, 1, 2, 2)$, коммутирующей с диагонализируемой частью матрицы линейного приближения

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому выписанные для этого случая аналоги систем (2.1.9), (2.1.12) являются полуквазиоднородными относительно структур, порождаемых семейством матриц $\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \delta\mathbf{D}$. Нетрудно проверить, что (2.1.21) не имеет частных решений в виде квазиоднородных лучей. Будем искать частные решения этой системы в виде *закрученных* лучей. При этом заметим, что в силу обратимости уравнений модельной системы условия существования таких решений будут одинаковыми как для $\gamma = +1$, так и для $\gamma = -1$, поэтому ниже индекс будем опускать.

Итак,

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{-1}\Big(x_0 \cos\big(\delta\omega \ln t\big) - u_0 \sin\big(\delta\omega \ln t\big)\Big), \\ u(t) &= t^{-1}\Big(x_0 \sin\big(\delta\omega \ln t\big) + u_0 \cos\big(\delta\omega \ln t\big)\Big), \\ y(t) &= t^{-2}\Big(y_0 \cos\big(\delta\omega \ln t\big) - v_0 \sin\big(\delta\omega \ln t\big)\Big), \\ v(t) &= t^{-2}\Big(y_0 \sin\big(\delta\omega \ln t\big) + v_0 \cos\big(\delta\omega \ln t\big)\Big). \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (2.1.15) запишется тогда в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta\omega & 0 & 0 \\ \delta\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\delta\omega \\ 0 & 0 & \delta\omega & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \\ y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ (ax_0 - bu_0)(x_0^2 + u_0^2) \\ (au_0 + bx_0)(x_0^2 + u_0^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.22}$$

Система (2.1.22) имеет *однопараметрическое* семейство решений

$$\begin{aligned} &x_0 = \rho\cos\theta, && u_0 = \rho\sin\theta, \\ &y_0 = \rho(\delta\omega\sin\theta - \cos\theta), && v_0 = -\rho(\delta\omega\cos\theta + \sin\theta), \end{aligned}$$

где θ — параметр семейства, а величины $\delta, \rho > 0$ удовлетворяют системе уравнений

$$a\rho^2 + (\delta\omega)^2 - 2 = 0, \quad 3\delta\omega - b\rho^2 = 0.$$

В комплексной форме условия разрешимости этой последней системы уравнений выглядят следующим образом

$$c \neq -|c|, \quad \text{где} \quad c = a + ib,$$

т. е. совпадают с условиями неустойчивости, найденными в [125].

Итак, при выполнении этих условий исходная полная система дифференциальных уравнений имеет частные решения, стремящиеся к особой точке как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Существование решения, асимптотического к особой очке при $t \to -\infty$, разумеется означает неустойчивость равновесия исходной системы.

Следует отметить, что в примерах 2.1.2 и 2.1.3 неустойчивость является нормой в том смысле, что в пространстве параметров модельной системы множество, на котором нарушаются условия существования асимптотических решений, имеет нулевую меру.

Приведенные в предыдущих примерах условия существования асимптотических решений выписаны в монографии [125] как условия неустойчивости. При этом неустойчивость доказывалась при помощи обобщенного метода Четаева: авторы доказывали, что в окрестности асимптотического решения модельной системы существует некоторый конус, такой, что любая траектория, начинающаяся в этом конусе, покидает его, пересекая основание. С помощью теоремы 2.1.2 мы доказали, что эти же условия гарантируют существование асимптотических при $t \to -\infty$ решений исходной системы и оценили размерность множества этих решений.

Для более или менее полного исследования поставленной задачи нужно было бы еще исследовать резонанс $1 : 3$ (задача коразмерности 3) и резонанс $1 : 1$ в случае простых элементарных делителей. Интересно, что последняя задача имеет более высокий уровень вырождения: ее коразмерность равна 4. Эти две задачи, однако, обладают неприятной особенностью: задачи об устойчивости для данных систем дифференциальных уравнений алгебраически неразрешимы [123, 139]. Это означает, грубо говоря, следующее: области асимптотической устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы имеют положительную меру, но гиперповерхность, являющаяся границей раздела этих областей трансцендентна. Тем не менее, для резонанса $1 : 3$ существуют (отдельно) достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости [122, 124], выделяющие подобласти с непересекающимися границами. Интересны также результаты, полученные относительно недавно П. С. Красильниковым [70, 72, 71]: несмотря на алгебраическую неразрешимость в пространствах параметров обеих задач существуют подмножества положительной меры, где критерий асимптотической устойчивости может быть выписан явно, т. е. поверхности раздела областей асимптотической устойчивости и неустойчивости содержат алгебраические куски. Тем не менее, получающиеся в тих задачах условия неустойчивости чрезвычайно сложны. Поэтому мы не будем здесь их рассматривать. Еще более сложно обстоит дело в задачах высших коразмерностей: там алгебраическая неразрешимость является нормой [3, 46].

2. Периодические и квазипериодические системы

В предыдущем параграфе были получены достаточные условия существования асимптотических решений с неэкспоненциальной асимптотикой для некоторой гладкой автономной системы дифференциальных уравнений. Целью этого параграфа является нахождение аналогичных условий для некоторых классов неавтономных систем уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

в предположении, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ является гладкой вектор-функцией $\mathbf{x}$, коэффициенты разложения которой в ряд Маклорена в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ являются гладкими ограниченными функциями времени t. Начнем с простого случая, когда $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ зависит 2π-периодически от t:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\, t + 2\pi) = \mathbf{f}(\mathbf{x},\, t).$$

Мы покажем, что вопрос существования асимптотических решений с неэкспоненциальной асимптотикой для периодических систем также, как и в автономном случае, сводится к вопросу существования собственных векторов некоторого квазиоднородного векторного поля.

Обозначим через $\mathbf{A}(t)$ матрицу Якоби правой части системы (2.2.1), вычисленную в начале координат ($\mathbf{A}(t) = d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(0,t)$), и рассмотрим линеаризованную систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{2.2.2}$$

Прежде всего, для упрощения рассматриваемой задачи мы применим известную теорию Флоке – Ляпунова.

Теорема 2.2.1. [39] *Существует комплексное линейное невырожденное непрерывное 2π-периодическое преобразование координат*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{B}(t+2\pi) \equiv \mathbf{B}(t), \quad \det \mathbf{B}(t) \neq 0,$$

приводящее систему (2.2.2) *к автономному виду*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2.2.3}$$

Далее мы применим указанное преобразование к нелинейной системе (2.2.1). Получившаяся при этом система будет, вообще говоря, комплексной. Однако та же теория Флоке – Ляпунова утверждает, что приведение линейной системы с 2π-периодическими коэффициентами к линейной системе с постоянными коэффициентами может быть осуществлено при помощи *вещественной* 4π-периодической замены. Получающаяся при этом *нелинейная* система будет также 4π-периодической, однако ее можно сделать 2π-периодической, изменив масштаб времени. В силу изложенных соображений без потери общности можно считать, что система линейного приближения для (2.2.1) автономна ($\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$).

Предположим, что все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ системы (2.2.3) чисто мнимые или нулевые. Числа $e^{2\pi\lambda_1}, \ldots, e^{2\pi\lambda_n}$ называют *мультипликаторами* системы (2.2.2). Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лежат на мнимой оси, то мультипликаторы расположены на единичной окружности.

Исследуем возможность упрощения системы (2.2.1) при помощи формального 2π-периодически зависящего от t преобразования:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, t), \tag{2.2.4}$$

где $\mathbf{Y}_m$ — однородные вектор-функции степени m, $\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, t+2\pi) \equiv \mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, t)$.

После преобразования (2.2.4) система (2.2.1) перепишется в виде системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad d_{\mathbf{y}} g(\mathbf{0}, t) = \mathbf{A}, \qquad (2.2.5)$$

правая часть которой снова периодически зависит от времени ($\mathbf{g}(\mathbf{y}, t + 2\pi) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$).

Снова представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде суммы двух матриц $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{J}$, где матрица $\mathbf{D}$ диагонализируема, а матрица $\mathbf{J}$ подобна блочно-жордановой матрице с нулевой диагональю. Запишем правую часть (2.2.5) в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{J}\mathbf{y} + \ldots,$$

где многоточие означает совокупность нелинейных по $\mathbf{y}$ членов.

Как и в предыдущем параграфе, дадим два эквивалентных определения нормальной формы.

Определение 2.2.1. Будем говорить, что система (2.2.5) записана в *нормальной форме Пуанкаре*, если для любых $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ имеет место формальное равенство

$$\exp(-\mathbf{D}\sigma)\mathbf{h}\big(\exp(\mathbf{D}\sigma), \mathbf{z}, \tau + \sigma\big) = \mathbf{h}(\mathbf{z}, t). \qquad (2.2.6)$$

Система (2.2.5) имеет, очевидно, расширенную группу симметрии, инфинитезимальная образующая которой удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{y}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = 1. \qquad (2.2.7)$$

Поскольку все собственные числа матрицы $\mathbf{D}$ чисто мнимые, то (2.2.7) порождает группу вращений фазового пространства и трансляций по времени.

Используя (1.5.40), получим, что вектор-функция $\mathbf{h}(\mathbf{y}, t)$ должна удовлетворять системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = \big[\mathbf{h}(\mathbf{y}, t),\, \mathbf{D}\mathbf{y}\big]. \qquad (2.2.8)$$

Тем не менее, ни соотношение (2.2.6), ни уравнения (2.2.8) не определяют конкретного вида правых частей нормализованной системы.

Приведем матрицу $\mathbf{D}$ к диагональному виду

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Рассмотрим разложение некоторой j-й компоненты вектор-функции $\mathbf{h}(\mathbf{y}, t)$ в ряд Маклорена

$$h^j = \sum_{p_1,\ldots,p_n} h^j_{p_1,\ldots,p_n}(t)(y^1)^{p_1}\ldots(y^n)^{p_n},$$

где коэффициенты $h^j_{p_1,\ldots,p_n}(t)$ 2π-периодичны по t.

Разложим эти функции в комплексные ряды Фурье и запишем смешанное разложение для h^j:

$$h^j = \sum_{p_1,\ldots,p_n,p_{n+1}} h^j_{p_1,\ldots,p_n,p_{n+1}}(y^1)^{p_1}\ldots(y^n)^{p_n}e^{ip_{n+1}t},$$

где числа $p_1,\ldots,p_n$ — целые неотрицательные, а p_{n+1} — целое.

Снова рассмотрим векторы $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{N}_0^n$.

Определение 2.2.2. Моном $h^j_{p_1,\ldots,p_n,p_{n+1}}(y^1)^{p_1}\ldots(y^n)^{p_n}e^{ip_{n+1}t}$, $|\mathbf{p}|\geqslant 2$ назовем *резонансным*, если выполнено равенство

$$\lambda_j = \langle\boldsymbol{\lambda},\mathbf{p}\rangle + ip_{n+1}. \tag{2.2.9}$$

Соотношение (2.2.9) называется резонансом порядка $p=|\mathbf{p}|$.

Определение 2.2.3. Говорят, что система (2.2.5) записана в нормальной форме Пуанкаре, если разложение нелинейной части вектор-функции $\mathbf{h}(\mathbf{y}, t)$ в смешанные ряды Маклорена – Фурье содержит только резонансные мономы.

Как и для автономного случая, эти определения эквивалентны, и также имеет место теорема Пуанкаре – Дюлака.

Теорема 2.2.2. [4] *При помощи формального преобразования* (2.2.4) *система* (2.2.1) *может быть приведена к нормальной форме* (2.2.5).

Замечание 2.2.1. Следует отметить, что, вообще говоря, *каждая* однородная вектор-функция $\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, t)$, участвующая в нормализующем преобразовании (2.2.4), представляет собой формальный ряд Фурье. Тем не менее, поскольку в рассматриваемом случае «параметрическое возмущение» содержит только одну базовую частоту $\omega=1$, на *каждом* конкретном m-м шаге при разрешении так называемого гомологического уравнения [4] «по t» не возникает проблемы малых знаменателей, на которой мы подробнее остановимся ниже, и можно показать, что каждая форма $\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, t)$ достаточно регулярно зависит от t, хотя относительно всей совокупности переменных преобразование (2.2.4) будет, разумеется, лишь формальным.

Далее для рассматриваемого периодического случая также верна лемма о разделении движений.

Лемма 2.2.1. *Линейная замена переменных*

$$\mathbf{y} = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{z} \tag{2.2.10}$$

переводит нормализованную систему уравнений (2.2.5) *в систему*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, 0). \tag{2.2.11}$$

Доказательство. Эта лемма фактически является следствием леммы 1.5.8. Поскольку (2.2.7) порождает расширенную группу симметрии, то (2.2.11) являются аналогом уравнений (1.5.41).

Замена (2.2.10) позволила нам избавиться не только от диагонализируемой части линейных членов, но и от явной зависимости от времени. Следовательно, в данной ситуации снова формально применима техника поиска асимптотических решений полуквазиоднородных систем. Однако, как и следовало ожидать, нормализующее преобразование (2.2.4) при наличии резонансов (2.2.9), как правило, расходится [4]. Но, как и в автономном случае, о наличии асимптотических решений исходной системы (2.2.1) можно судить по наличию асимптотических решений квазиоднородного укорочения системы (2.2.11).

Следующая теорема обобщает результаты работы [121].

Теорема 2.2.3. *Пусть все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *чисто мнимые или нулевые, и пусть система* (2.2.11) *положительно полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой вещественной матрицей* $\mathbf{G}$*, собственные числа которой имеют положительные действительные части. Рассмотрим модельную систему, являющуюся квазиоднородным укорочением* (2.2.11) *относительно структуры, порождаемой матрицей* $\mathbf{G}$*:*

$$\dot{\mathbf{z}} = \overset{\circ}{\mathbf{h}}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}). \tag{2.2.12}$$

Пусть, далее, существуют такие вектор $\mathbf{z}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{z}_0^\gamma \neq 0$ *и число* $\gamma = \pm 1$*, удовлетворяющие алгебраической системе уравнений*

$$-\gamma \mathbf{G}\mathbf{z}_0^\gamma = \overset{\circ}{\mathbf{h}}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^\gamma). \tag{2.2.13}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.2.1) *имеет асимптотическое решение* $\mathbf{x}(t) \to 0$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 2.1.2.

В качестве следствия легко получить теорему о неустойчивости.

Теорема 2.2.4. *Пусть все мультипликаторы линейного приближения 2π-периодической системы* (2.2.1) *лежат на единичной окружности и нормальная форма системы* (2.2.1) *такова, что полученная из нее путем отбрасывания диагонализируемых линейных членов и обнулением времени автономная модельная система положительно полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой матрицей* $\mathbf{G}$*, собственные числа которой имеют только положительные вещественные части. Если для векторного поля укорочения* $\overset{\circ}{\mathbf{h}}_{\mathrm{q}}$ *существует вектор* $\mathbf{z}_0^-$*,* $\mathbf{z}_0^- \neq 0$ *такой, что*

$$\mathbf{G}\mathbf{z}_0^- = \overset{\circ}{\mathbf{h}}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^-)$$

(*т. е.* $\gamma = -1$)*, то особая точка системы* (2.2.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчива.*

Во многих практических задачах системы уравнений с периодическими коэффициентами получаются как системы уравнений возмущенного движения в окрестности периодических траекторий автономных систем. Поэтому теорема 2.2.4 является по сути дела теоремой о неустойчивости периодических решений.

Что касается проблемы поиска подходящей группы, задающей квазиоднородную структуру, то для периодического случая этот вопрос немного сложнее, чем для автономного. Разумеется и в этой ситуации можно выделить модельную систему (2.2.12) при помощи техники многогранников Ньютона, а затем получившуюся диагональную матрицу комбинировать с матрицами линейных инфинитезимальных образующих групп симметрии системы (2.2.11). Однако, в самом общем случае нормальная форма не дает информации о существовании каких-либо линейных полей симметрий.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \tag{2.2.14}$$

правая часть которой квазипериодически зависит от времени.

Системы типа (2.2.14) более удобно рассматривать как автономные системы в некотором $(n+d)$-мерном расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z} = \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^d) \bmod 2\pi\}$ — d-мерный тор, $d \geqslant 2$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \tag{2.2.15}$$

где $\boldsymbol{\omega}(\omega^1, \ldots, \omega^d) \in \mathbb{R}^d$ — d-мерный вектор частот, $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d)$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что частоты обмотки гора рационально независимы, т. е. не выполняется ни одно из резонансных соотношений вида

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle = 0 \tag{2.2.16}$$

для векторов $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^d$, $|\mathbf{s}| > 0$.

Мы будем исследовать даже более общие системы уравнений, чем (2.2.15). На многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$ мы рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d), \tag{2.2.17}$$

для которых движение на инвариантном многообразии $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{T}^d$ представляет собой обмотку тора: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\varphi}_0$, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$.

На вектор-функции $\mathbf{f}, \boldsymbol{\xi}$ мы будем вынуждены накладывать более жесткие условия гладкости, а именно предполагать, что эти вектор-функции аналитичны по $\boldsymbol{\varphi}$ в некоторой комплексной окрестности тора $\mathbb{T}^d$.

Выделим в уравнениях (2.2.17) первые нетривиальные члены разложения по $\mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x}, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \tag{2.2.18}$$

где $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi})$.

Если резонансы (2.2.16) отсутствуют, то система (2.2.11) эквивалентна n-мерной линейной системе с квазипериодическими по времени t коэффициентами. По своим свойствам эта система резко отличается от аналогичной системы с периодическими коэффициентами. Система с периодическими коэффициентами приводится в соответствии с теорией Флоке–Ляпунова к автономному виду. Для квазипериодических систем подобный результат не имеет места. Достаточные условия приводимости таких систем достаточно сложны. Помимо естественных диофантовых условий строгой несоизмеримости на частоты $\omega^1, \ldots, \omega^d$ эти условия, как правило содержат некоторые достаточно жесткие ограничения на спектр рассматриваемой системы (см. например [171]), выполнимость которых невозможно проверить, не проинтегрировав систему. Другой подход к этой проблеме заключается в рассмотрении квазипериодических систем как малых возмущений автономных [17, 172]. В частности, в работе [172] показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий типа нерезонансности на собственные числа невозмущенной системы и частоты обмотки система приводима, если малый параметр принадлежит некоторому канторовому множеству ненулевой меры. В работе [194] рассмотрен случай, когда элементы матрицы $\mathbf{A}$ малы и при условии строгой нерезонансности доказана приводимость (2.2.18) к системе с экспоненциально малой непостоянной частью. Чтобы избежать всех этих сложностей, мы будем *a priori* предполагать, что матрица линейного приближения постоянна ($\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{A}$).

Введем понятие резонансов для рассматриваемой задачи. Пусть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}$.

Определение 2.2.4. Линейное соотношение между компонентами векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\omega}$ вида

$$\lambda_j = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle, \tag{2.2.19}$$

$\mathbf{p} \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$ будем называть *резонансом первого рода* порядка $p = |\mathbf{p}|$, а соотношение

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle = 0 \tag{2.2.20}$$

назовем *резонансом* порядка $p = |\mathbf{p}|$ *второго рода.*

Лемма 2.2.2. *Пусть в рассматриваемой системе отсутствуют резонансы второго рода первого порядка. При помощи формальной замены*

$$\boldsymbol{\varphi} \mapsto \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x} \mod 2\pi, \tag{2.2.21}$$

где $d \times n$-матрица $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})$ представима в виде формального кратного ряда Фурье, можно добиться того, чтобы

$$d_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}.$$

Если, кроме того, дополнительно выполнены диофантовы условия

$$|\lambda_j + i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle| \geqslant C|\mathbf{s}|^{-a} \tag{2.2.22}$$

при $|\mathbf{s}| > 0$, где $C > 0$, $a > 0$ — некоторые не зависящие от вектора $\mathbf{s}$ постоянные, то эта замена будет аналитической в некоторой малой комплексной окрестности тора $\mathbb{T}^d$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что после преобразования (2.2.21) система линейного приближения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x},$$

где $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}) = d_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi})$, превратится в систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{A}\mathbf{x} - d_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}.$$

Разумеется, замена (2.2.21) приведет также к появлению новых нелинейных по $\mathbf{x}$ членов, однако, мы ограничимся лишь рассмотрением системы линейного по $\mathbf{x}$ приближения.

Наша задача будет состоять в том, чтобы подобрать матрицу $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})$ таким образом, чтобы выражение $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{A}\mathbf{x} - d_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}$ тождественно обращалось в нуль. Без ограничения общности будем предполагать, что матрица $\mathbf{A}$ приведена к жорданову виду. Более того, как легко видеть, доказательство достаточно провести для случая, когда матрица $\mathbf{A}$ является жордановой клеткой, на диагонали которой стоит один из корней λ_j характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}$. Элементы $c_l^k(\boldsymbol{\varphi})$

матрицы $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})$ должны удовлетворять следующей системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных на торе $\mathbb{T}^d$:

$$\begin{aligned}&\langle d_{\boldsymbol{\varphi}} c_l^k(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\omega}\rangle + \lambda_j c_l^k(\boldsymbol{\varphi}) + c_{l-1}^k(\boldsymbol{\varphi}) = b_l^k(\boldsymbol{\varphi}), l = 2, \ldots, n, k = 1, \ldots, d\\ &\langle d_{\boldsymbol{\varphi}} c_l^k(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\omega}\rangle + \lambda_j c_l^k(\boldsymbol{\varphi}) = b_l^k(\boldsymbol{\varphi}), \quad k = 1, \ldots, d\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Если эта система разрешима при $l = 1$ для любых $b_l^k(\boldsymbol{\varphi})$, то остальные коэффициенты могут быть найдены аналогично по индукции (здесь через $b_l^k(\boldsymbol{\varphi})$ обозначены элементы матрицы $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$). Разложим функции $b_l^k(\boldsymbol{\varphi})$ и $c_l^k(\boldsymbol{\varphi})$ в кратные ряды Фурье, подставим в (2.2.23) и приравняем коэффициенты при гармониках $e^{i\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}\rangle}$. Соответствующие коэффициенты рассматриваемых функций будут связаны тогда соотношениями

$$\big(i\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}\rangle + \lambda_j\big) c_{1,\mathbf{s}}^k = b_{1,\mathbf{s}}^k. \tag{2.2.24}$$

Поскольку по условиям леммы резонансы второго рода первого порядка отсутствуют, коэффициенты Фурье $c_{1,\mathbf{s}}^k$ однозначно находятся из (2.2.24). Заметим, что отсутствие указанных резонансов означает также, что все корни λ_j характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ ненулевые, поэтому $c_{1,0}^k = (\lambda_j)^{-1} b_{1,0}^k$.

Для доказательства аналитичности воспользуемся стандартной для КАМ-теории процедурой (см., например, [202]).

Зафиксируем некоторое $r > 0$ и рассмотрим шкалу банаховых пространств $\mathfrak{A}_\sigma$, $\sigma \in (0, 1]$, где $\mathfrak{A}$ являются

пространствами функций $c(\mathbf{w})$, $c\colon \mathscr{A}_{r\sigma}^d \to \mathbb{C}$, где множество $\mathscr{A}_{r\sigma}^d$ представляет собой d-кратное декартово произведение кольца

$$\mathscr{A}_{r\sigma}^d = \{w \in \mathbb{C}\colon e^{-r\sigma} < |w| < e^{r\sigma}\}$$

на себя, голоморфных на $\mathscr{A}_{r\sigma}^d$ и непрерывных на границе этого множества, с нормой

$$\|c\|_\sigma = \max_{\partial \mathscr{A}_{r\sigma}^d} |c(\mathbf{w})|.$$

Полезно также заметить, что функции из $\mathfrak{A}_\sigma$ допускают разложение в кратные ряды Лорана

$$c(\mathbf{w}) = \sum_{s_1, \ldots, s_d} (w^1)^{s_1} \ldots (w^d)^{s_d},$$

коэффициенты которых удовлетворяют известной оценке Коши

$$|c_{\mathbf{s}}| \leqslant e^{-|\mathbf{s}|r\sigma}\|c\|_{\sigma}.$$

Если $0 < \sigma' < \sigma \leqslant 1$, то $\mathfrak{A}_\sigma \subset \mathfrak{A}_{\sigma'}$ и $\|c\|_{\sigma'} \leqslant \|c\|_\sigma$ для любой функции $c \in \mathfrak{A}_\sigma$.

Рассмотрим некоторую функцию $b \in \mathfrak{A}_\sigma$ и дифференциальное уравнение в частных производных, получающееся из последней серии уравнений (2.2.23) при помощи замены $w^k = e^{i\varphi^k}$, $k = 1, \ldots, d$ (индексы в уравнении будем далее для сокращения записи опускать)

$$i\langle \mathbf{w}d_{\mathbf{w}}c(\mathbf{w}), \boldsymbol{\omega}\rangle + \lambda c(\mathbf{w}) = b(\mathbf{w}), \tag{2.2.25}$$

где λ — некоторое комплексное число, удовлетворяющее диофантовым условиям типа (2.2.22), а $\mathbf{w}d_{\mathbf{w}} = \big(w^1\partial/\partial w^1, \ldots, w^d\partial/\partial w^d\big)$.

Пусть $c(\mathbf{w})$ — некоторое решение уравнения (2.2.25). Используя неравенства Коши и диофантовы условия (2.2.22), оценим это решение по норме пространства $\mathfrak{A}_{\sigma'}$ при $\sigma' < \sigma$:

$$\begin{aligned}
\|c\|_{\sigma'} &\leqslant |\lambda|^{-1}|b_0| + \sum_{\mathbf{s}\neq 0}\frac{|b_{\mathbf{s}}|}{|\lambda + \langle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}\rangle|}e^{|\mathbf{s}|\sigma'} \leqslant \\
&\leqslant \left(|\lambda|^{-1} + C\sum_{\mathbf{s}\neq 0}|\mathbf{s}|^a e^{-|\mathbf{s}|(\sigma-\sigma')}\right)\|b\|_{\sigma'} \leqslant \\
&\leqslant \left(|\lambda|^{-1} + C\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{s}|^a e^{-|\mathbf{s}|(\sigma-\sigma')}\,d\mathbf{s}\right)\|b\|_{\sigma},
\end{aligned}$$

где $d\mathbf{s} = ds_1, \ldots, ds_d$.

Выписанный несобственный интеграл вычисляется явно, поэтому

$$\|c\|_{\sigma'} \leqslant \Big(|\lambda|^{-1} + CS(d-1)\Gamma(a+d)(\sigma-\sigma')^{-(a+d)}\Big)\|b\|_\sigma.$$

Здесь $S(d-1)$ означает площадь $(d-1)$-мерной единичной сферы, Γ — гамма-функцию Эйлера [142].

Отсюда следует, что получившееся решение рассматриваемого уравнения также будет аналитическим, но уже в несколько меньшей области. Аналогично доказывается голоморфная разрешимость остальных групп уравнений в (2.2.23).

Лемма доказана.

Для систем типа (2.2.17), матрица линейного приближения которых постоянна, и уравнения на торе не содержат линейных по $\mathbf{x}$ членов, также существует теория нормальных форм [11]. Рассмотрим формальную замену координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \sum_{m=2}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}) \mod 2\pi. \tag{2.2.26}$$

Вектор-функции $\mathbf{Y}_m, \boldsymbol{\Psi}_m$ — однородные формы $\mathbf{y}$ степени m с коэффициентами, представимыми в виде формальных кратных рядов Фурье.

В результате преобразования (2.2.26) мы получим новую систему уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}), \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}). \tag{2.2.27}$$

Матрицу $\mathbf{A}$ снова представим в виде $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{J}$, где $\mathbf{D}$ подобна диагональной матрице, а $\mathbf{J}$ — блочно-жордановой с нулевой диагональю. Запишем также вектор-функцию $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{J}\mathbf{y} + \ldots,$$

где многоточие означает совокупность нелинейных по $\mathbf{y}$ членов.

Определение 2.2.5. Будем говорить, что система (2.2.27) представлена в *нормальной форме Пуанкаре*, если для любых $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}$ имеет место система формальных равенств

$$\begin{gathered} \exp(-\mathbf{D}\sigma)\mathbf{h}\Big(\exp(\mathbf{D}\sigma)\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\omega}\sigma\Big) = \mathbf{h}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}), \\ \boldsymbol{\eta}\Big(\exp(\mathbf{D}\sigma)\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\omega}\sigma\Big) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}). \end{gathered} \tag{2.2.28}$$

Это определение эквивалентно тому, что система (2.2.27) имеет группу симметрии, инфинитезимальная образующая которой порождает систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{y}, \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\sigma} = \boldsymbol{\omega}, \tag{2.2.29}$$

что сразу же приводит к системе дифференциальных уравнений на вектор-функции $\mathbf{h}, \boldsymbol{\eta}$:

$$d_{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\omega} = \Big[\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})\mathbf{D}\mathbf{y}\Big], \quad d_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})\mathbf{D}\mathbf{y} + d_{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \tag{2.2.30}$$

В системе (2.2.30) символ $[\cdot\,,\cdot]$ означает скобку на алгебре Ли векторных полей на $\mathbb{R}^n$; векторно-матричные объекты различной размерности перемножаются по обычным правилам матричной алгебры.

Система (2.2.29) порождает группу преобразований многообразия $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$, которая на $\mathbb{R}^n$ устроена как группа вращений, а на $\mathbb{T}^d$ — как группа трансляций.

Использование равенств (2.2.28) или (2.2.30) для вычисления коэффициентов нормальной формы довольно затруднительно. Рассмотрение резонансов дает наглядное представление о том, как должны выглядеть правые части нормализованной системы (2.2.27). Итак, пусть $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Рассмотрим смешанные разложения Фурье–Маклорена некоторых j-х и l-х компонент вектор-функций $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\eta}$ соответственно

$$h^j = \sum_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} h^j_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n} e^{i(\psi^1 s_1 + \ldots + \psi^d s_d)},$$

$$\eta^l = \sum_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} \eta^l_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n} e^{i(\psi^1 s_1 + \ldots + \psi^d s_d)}.$$

Определение 2.2.6. Моном

$$h^j_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n} e^{i(\psi^1 s_1 + \ldots + \psi^d s_d)}$$

назовем *резонансным*, если векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ удовлетворяют соотношению (2.2.19), т. е. имеет место резонанс первого рода. С другой стороны, моном

$$\eta^l_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_d} (y^1)^{p_1} \ldots (y^n)^{p_n} e^{i(\psi^1 s_1 + \ldots + \psi^d s_d)}$$

будем называть *резонансным*, если $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ удовлетворяют соотношению (2.2.20), т. е. имеет место резонанс второго рода.

Определение 2.2.7. Будем говорить, что система (2.2.27) записана в нормальной форме, если разложения вектор-функций $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ в смешанные кратные ряды Маклорена – Фурье содержат только резонансные мономы.

Имеет место аналог теоремы Пуанкаре – Дюлака:

Теорема 2.2.5. *При помощи формального преобразования* (2.2.26) *система* (2.2.17) *может быть приведена к нормальной форме* (2.2.27).

Теорема 2.2.5 доказана в [11] для систем вида (2.2.15). Однако, при сделанных выше предположениях об отсутствии резонансов второго рода первого порядка теорема может быть распространена на более общие системы вида (2.2.17), причем доказательство будет практически повторять приведенное в [11].

В отличие от систем с периодическими коэффициентами рассматриваемые нами системы обладают еще одним неприятным свойством. Нормализация уравнений (2.2.17) представляет собой процедуру последовательного вычисления однородных вектор-форм $\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$, коэффициенты которых без наложения некоторых дополнительных условий будут лишь *формальными* кратными рядами Фурье относительно переменных $(\psi^1, \ldots, \psi^d)$, причем эти ряды могут начать расходиться уже на первых шагах нормализации, т. е. при малых m. Для того, чтобы избежать этого неприятного явления, необходимо дополнительно накладывать диофантовы условия типа (2.2.22) *для тех пар векторов* $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$, для которых не имеют место резонансы. Сформулируем более точно необходимые для этого требования.

Лемма 2.2.3. *Пусть существуют такие постоянные $C_{M_*} > 0$, $a_{M_*} > 0$, не зависящие от вектора $\mathbf{s}$, что для тех векторов $\mathbf{p}, \mathbf{s}$, $|\mathbf{p}| \leqslant M_*$, $|\mathbf{s}| > 0$ для которых не имеют место резонансные соотношения* (2.2.19), (2.2.20), *выполнены следующие неравенства*

$$|\lambda_j - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \rangle - i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle| \geqslant C_{M_*} |\mathbf{s}|^{-a_{M_*}}, \tag{2.2.31}$$

$$|\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \rangle + i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{s} \rangle| \geqslant C_{M_*} |\mathbf{s}|^{-a_{M_*}}. \tag{2.2.32}$$

Тогда коэффициенты вектор-форм $\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\Psi}_m(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ для $m \leqslant M_*$ будут аналитичны по $\boldsymbol{\psi}$ в некоторой малой комплексной окрестности тора $\mathbb{T}^d$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2.2.

Конечно, надо учитывать, что размеры комплексной окрестности тора, в которой аналитичны коэффициенты некоторой m-й формы нормализующего преобразования, убывают с ростом m. Поэтому вряд ли приходится ожидать, что в более или менее общей ситуации все формы в разложении (2.2.26) будут иметь аналитические по ψ коэффициенты.

Сформулируем лемму о разделении движений.

Лемма 2.2.4. *Под действием замены переменных*

$$\mathbf{y} = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\theta} \tag{2.2.33}$$

нормализованная система уравнений (2.2.27) *примет вид*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}). \tag{2.2.34}$$

Напомним, что $d_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(\mathbf{0}, \theta)$ не зависит от θ и является нильпотентным оператором; $\eta(\mathbf{0}, \theta) = \mathbf{0}$, $d_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(\mathbf{0}, \theta) = \mathbf{0}$.

Системы типа (2.2.34) сами по себе являются достаточно интересным объектом, независимо от того, получены ли они из нормальных форм систем вида (2.2.17). Рассмотрим (2.2.34) с позиций «квазиоднородной теории». В фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$ этой системы нам необходимо ввести некоторую шкалу, позволяющую выделять укорочения. Воспользуемся подходом из § 5 главы 1. В «слое» $\mathbb{R}^n$, отвечающем переменной $\mathbf{z}$, мы зададим шкалу, отвечающую обобщенной группе квазиоднородных растяжений:

$$\mathbf{z} \mapsto \exp(-\mathbf{G}\sigma)\mathbf{z}.$$

Простейшей группой преобразований, не нарушающей топологию тора $\mathbb{T}^d$, является группа трансляций:

$$\theta \mapsto \theta + \boldsymbol{\nu}\sigma, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^d.$$

Если при этом время преобразуется по закону

$$t \mapsto e^{\sigma} t,$$

то инфинитезимальная образующая данной группы преобразований порождается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\sigma} = -\mathbf{G}\mathbf{z}, \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = \boldsymbol{\nu}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = t. \tag{2.2.35}$$

Будем считать, что вектор-функции $\mathbf{h}, \boldsymbol{\eta}$ зависят от θ следующим образом:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}),$$

где $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P_s}\theta \bmod 2\pi$ — так называемые резонансные фазы, $\mathbf{P_s}$ — $d' \times d$-матрица ($d' \leqslant d$), строки которой представляют собой систему линейно независимых целочисленных векторов $\mathbf{s}$, таких, что гармоники $e^{i\langle \mathbf{s}, \theta\rangle}$ входят в правые части уравнений (2.2.34). Это предположение оправдано, поскольку в процессе нормализации «убивается» большое количество Фурье-гармоник.

Лемма 2.2.5. *Пусть $d' < d$. Тогда существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{\nu}$, что вектор-функции $\mathbf{h}, \boldsymbol{\eta}$ будут инвариантны относительно семейства сдвигов $\theta \mapsto \theta + \boldsymbol{\nu}\sigma$.*

Доказательство. Для примера проведем доказательство для вектор-функции $\mathbf{h}$. Для инвариантности необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\mathbf{0} = \frac{d}{d\sigma}\left(\mathbf{h}\Big(\mathbf{z}, \mathbf{P_s}(\theta + \boldsymbol{\nu}\sigma)\Big)\right) = d_{\phi}\mathbf{h}\Big(\mathbf{z}, \mathbf{P_s}(\theta + \boldsymbol{\nu}\sigma)\Big)\mathbf{P_s}\boldsymbol{\nu}.$$

Поскольку $d' < d$, то существует ненулевой вектор $\boldsymbol{\nu}$, перпендикулярный всем векторам, образующим матрицу $\mathbf{P_s}$, т. е. $\mathbf{P_s}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$.

Лемма доказана.

Определение 2.2.8. Систему (2.2.34) назовем *квазиоднородной* и будем приписывать ее правым частям, как и ранее, индекс «q», если (2.2.34) имеет расширенную группу симметрии, порожденную потоком системы (2.2.35).

Из леммы 2.2.5 следует, что если (2.2.34) является квазиоднородной при некоторой фиксированной матрице $\mathbf{G}$, и $\boldsymbol{\nu} = 0$, то эта система будет квазиоднородной при любом $\boldsymbol{\nu} \in \operatorname{Ker} \mathbf{P_s}$.

Определение 2.2.9. Систему (2.2.34) назовем *полуквазиоднородной*, если (2.2.34) обладает экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии, порожденной потоком системы (2.2.35).

Рассмотрим укороченную систему уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}). \tag{2.2.36}$$

Частные решения (2.2.36), лежащие на орбитах рассматриваемой группы преобразований, имеют вид

$$\mathbf{z}^{\gamma}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \mathbf{z}_0^{\gamma}, \quad \boldsymbol{\theta}^{\gamma}(t) = \boldsymbol{\theta}_0^{\gamma} + \boldsymbol{\nu} \ln(\gamma t). \tag{2.2.37}$$

Следует отметить, что при этом резонансные фазы $\boldsymbol{\phi}^{\gamma}(t) = \mathbf{P_s}\theta^{\gamma}(t)$ остаются постоянными.

Для того, чтобы система (2.2.36) имела частное решение вида (2.2.37), $\mathbf{z}_0^{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}_0^{\gamma} \neq 0$ и $\boldsymbol{\theta}_0^{\gamma} \in \mathbb{T}^d$ должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$-\gamma \mathbf{G} \mathbf{z}_0^{\gamma} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^{\gamma}, \boldsymbol{\theta}_0^{\gamma}), \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}_0^{\gamma}, \boldsymbol{\theta}_0^{\gamma}). \tag{2.2.38}$$

Система (2.2.38) является системой $n + d$ уравнений, содержащей $n + d$ неизвестных, если, кроме того $d' < d$, то в систему войдут дополнительно $d - d'$ параметров. Очевидно, что в ряде случаев этими параметрами можно будет распорядиться так, чтобы система (2.2.38) имела необходимое решение.

Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий введенные понятия.

ПРИМЕР 2.2.1. Система трех дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = -{}^1\!/_2 z^3, \quad \dot{\theta}^1 = z^2 \cos\phi, \quad \dot{\theta}^2 = -z^2 \sin\phi,$$

где $\phi = \theta^1 + \theta^2$ — резонансная фаза, является квазиоднородной относительно группы преобразований, задаваемой фазовым потоком системы

$$\frac{dz}{d\sigma} = -{}^1\!/_2 z, \quad \frac{d\theta^1}{d\sigma} = \nu, \quad \frac{d\theta^2}{d\sigma} = -\nu$$

и имеет семейство частных решений

$$z = -\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \theta^1 = \theta^1_0 + \frac{\sqrt{t}}{2}\ln t, \quad \theta^2 = \theta^2_0 - \frac{\sqrt{t}}{2}\ln t, \quad \theta^1_0 + \theta^2_0 = \frac{\pi}{4},$$

лежащее на орбитах этой группы при $\nu = {}^{\sqrt{2}}\!/_2$.

Если система (2.2.34) получена из нормальной формы (2.2.27), то вид укорочения сильно зависит от того, какие резонансы имеют место. Если исходная система имеет вид (2.2.15), то вектор-функция $\boldsymbol{\eta}$ тождественно равна нулю, любая укороченная система будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0},$$

и система уравнений (2.2.38) превратится в систему

$$-\gamma \mathbf{G}\mathbf{z}^\gamma_0 = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}^\gamma_0, \boldsymbol{\theta}^\gamma_0),$$

где $\boldsymbol{\theta}^\gamma_0$ следует рассматривать как параметры.

Аналогичная ситуация имеет место, когда отсутствуют резонансы второго рода вплоть до достаточно высокого порядка, т. к. в этом случае разложение $\boldsymbol{\eta}$ будет начинаться с достаточно высоких степеней $\mathbf{z}$. Если же, наоборот, отсутствуют резонансы первого рода низких порядков, то укорочения будут иметь вид уравнений:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{q}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}),$$

которые, конечно, *не могут иметь* асимптотических решений.

Укороченные системы (2.2.36) будем, как и раньше, называть модельными.

Частные решения укороченной системы (2.2.36) вида (2.2.37) порождают решения полной системы (2.2.34) с аналогичной асимптотикой. Точнее, имеет место

Теорема 2.2.6. *Пусть правые части системы* (2.2.34) *являются гладкими функциями на* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$*, система* (2.2.34) *является полуквазиоднородной относительно группы преобразований, порождаемой потоком системы* (2.2.35)*, и существуют* $\mathbf{z}^\gamma_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{z}^\gamma_0 \neq \mathbf{0}$ *и* $\boldsymbol{\theta}^\gamma_0 \in \mathbb{T}^d$*, удовлетворяющие* (2.2.38) *для некоторых* $\gamma = \pm 1$*,* $\boldsymbol{\nu} \in \operatorname{Ker} \mathbf{P_s}$*. Тогда система* (2.2.34) *имеет частное решение с главным членом асимптотики*

$$\mathbf{z}(t) \sim (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{z}_0^\gamma, \quad \boldsymbol{\theta}(t) \sim \boldsymbol{\theta}_0^\gamma + \boldsymbol{\nu}\ln(\gamma t)$$

при $t^\chi \to \gamma \times \infty$.

Доказательство следует из теоремы 1.5.2. Следует только отметить что формальные частные решения полной системы могут быть записаны в виде рядов

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}, \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\nu}\ln(\gamma t) + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}, \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

где $\mathbf{z}_k$, θ_k — полиномиальные вектор-функции, причем нулевые коэффициенты рядов (2.2.39) постоянны.

Если система (2.2.34) получена из нормальной формы (2.2.27) системы (2.2.17), то формальные частные решения (2.2.27) будут иметь вид

$$\mathbf{y}(t) = \exp\big(\mathbf{D}t - \mathbf{G}\ln(\gamma t)\big) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta},$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\nu}(\ln(\gamma t) + \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\theta}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}.$$

Если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ лежат на мнимой оси, то для того, чтобы $\mathbf{y}(t)$ формально стремилось к нулю, необходимо, чтобы β было положительным, т. е. система (2.2.34) была бы положительно полуквазиоднородной, и все собственные значения матрицы $\mathbf{G}$ имели бы положительные вещественные части. Приведем условия существования «неформальных» асимптотических решений.

Теорема 2.2.7. *Пусть правые части системы* (2.2.17) *удовлетворяют следующим условиям*:

a) *система* (2.2.18) *приводима и матрица приведенной системы имеет только чисто мнимые или нулевые собственные значения*;

b) *в системе отсутствуют резонансы второго рода первого порядка и существуют такие* $C > 0$, $a > 0$, *что выполнены неравенства* (2.2.22);

c) *нормальная форма* (2.2.27) *такова, что получающаяся из нее отбрасыванием соответствующих членов система* (2.2.34) *является положительно полуквазиоднородной, и все собственные числа задающей квазиоднородную структуру матрицы* $\mathbf{G}$ *положительны*;

d) *для выделения квазиоднородного укорочения* (2.2.36) *требуется вычислить* M *форм нормализующего преобразования* (2.2.26)*, и для некоторого большого* $M_* > M$ *существуют постоянные* $C_{M_*} > 0$*,* $a_{M_*} > 0$ *такие, что векторы* $\mathbf{p}$*,* $\mathbf{s}$*,* $|\mathbf{p}| \leqslant M_*$*,* $|\mathbf{s}| > 0$*, для которых не имеют место резонансные соотношения* (2.2.19)*,* (2.2.20)*, удовлетворяют диофантовым условиям* (2.2.31)*,* (2.2.32);

e) *существуют* $\mathbf{z}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{z}_0^\gamma \neq \mathbf{0}$*,* $\boldsymbol{\theta}_0^\gamma \in \mathbb{T}^d$*, удовлетворяющие* (2.2.38) *для некоторых* $\gamma = \pm 1$*,* $\boldsymbol{\nu} \in \operatorname{Ker} \mathbf{P}_{\mathbf{s}}$.

Тогда система (2.2.17) *имеет частное асимптотическое решение* $\big(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)\big) \to \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{T}^d$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Доказательство основано на уже использовавшихся при доказательстве теоремы 2.1.2 идеях. Мы изложим лишь схему этого доказательства и прокомментируем условия теоремы.

Условия a) и b) нужны для того, чтобы к рассматриваемой системе можно было применить нормализующее преобразование. После формальной полной нормализации и замены (2.2.33) мы получили бы полуквазиоднородную систему, которая в силу условий c) и e) имеет формальное решение с необходимой асимптотикой. Проведем частичную нормализацию до порядка M_* и сделаем замену (2.2.33). Тот факт, что частичная нормализация будет аналитическим преобразованием, гарантируется условием d). Возмутив частное решение (2.2.37) укороченной системы (2.2.36)

$$\mathbf{z}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\big(\mathbf{z}_0^\gamma + \mathbf{u}(\gamma t)\big), \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_0^\gamma + \boldsymbol{\nu}\ln(\gamma t) + \mathbf{v}(\gamma t),$$

и введя логарифмическое время $\tau = \ln(\gamma t)$, мы сведем решение задачи к применению лемм §3 главы 1. Матрица Ковалевской будет в этом случае автономна, поэтому леммы 1.2.2, 1.2.3 применимы без дополнительных предположений.

Применение этих лемм и завершает доказательство теоремы 2.2.7.

Из вида частного решения (2.2.37) укороченной системы (2.2.36) видно, что предельное движение на инвариантном торе, к которому стремится наше решение, не будет представлять в общем случае стандартную обмотку. Грубо говоря, это движение будет композицией двух обмоток, первая из которых происходит в реальном времени, а вторая — в логарифмическом. Сформулируем также теорему о неустойчивости.

Теорема 2.2.8. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, и в условии* e) $\gamma = -1$. *Тогда инвариантное многообразие* $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{T}^d$ *системы* (2.2.17) *неустойчиво.*

Доказательство следует из существования решения, асимптотического к $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{T}^d$ при $t \to -\infty$.

В заключение сделаем некоторые замечания о свойствах частного решения вида (2.2.37) на торе:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\nu} \ln t, \quad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{T}^n, \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.40}$$

Напомним, что движение $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ называется *равномерно распределенным* (по Вейлю), если для любой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{T}^n$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\mu_D(T)}{T} = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n},$$

где $\mu_D(T)$ — сумма длин интервалов на отрезке $[O, T]$, когда $\mathbf{v}(t) \in D$; $\operatorname{mes} D$ — мера области D ($\operatorname{mes} \mathbb{T}^n = (2\pi)^n$). Вейль дал следующий критерий равномерного распределения:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{i\langle \mathbf{m}, \mathbf{v}(t) \rangle}\, dt = 0 \tag{2.2.41}$$

для всех целочисленных векторов $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \neq 0$. В частности, условно-периодические движения

$$\mathbf{v} = \nu t + \mathbf{v}_0$$

с нерезонансным набором частот ν равномерно распределены на $\mathbb{T}^n$ (*теорема Боля–Серпинского–Вейля*).

Однако, движение (2.2.40) не удовлетворяет условию (2.2.41) уже при $n = 1$:

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau e^{i \ln t}\, dt = \frac{e^{i \ln \tau}}{1 + i} + \frac{\mathrm{const}}{\tau},$$

что осциллирует и не стремится к нулю при $\tau \to \infty$.

Определение 2.2.10. Пусть $t \mapsto \lambda(t)$ — положительная непрерывная функция, причем

$$\int\limits_0^\infty \lambda(t)\, dt = \infty.$$

Движение $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ будем называть (R, λ) — *равномерно распределенным* (кратко (R, λ) — рр), если для любой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{T}^n$

$$\lim_{\tau \to \infty} \int\limits_0^\tau \lambda(t) f(\mathbf{v}(t))\, dt \Bigg/ \int\limits_0^\tau \lambda(t)\, dt = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n},$$

где f — характеристическая функция области D.

Интеграл слева — это средняя взвешенная доля времени, в течение которого точка $\mathbf{v}(t)$ находится в области D. Если $\lambda(t) = 1$, то получим определение равномерного распределения по Вейлю.

В работе [58] доказано, что если функция $t\lambda(t)$ монотонна при $t \geqslant t_0$ и

$$\tau\lambda(\tau) \Bigg/ \int\limits_0^\tau \lambda(t)\, dt \to 0,$$

то движение (2.2.40) с несоизмеримым набором частот $\nu_1, \ldots, \nu_n$ будет (R, λ) — рр на $\mathbb{T}^n$.

Ясно, что этим условиям удовлетворяют функции $\lambda(t) = \frac{1}{t}$ и $\lambda(t) = (t \ln^\gamma t)^{-1}$ при всех $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3. Гамильтоновы системы

Применим разработанную методику для поиска асимптотических решений гамильтоновых систем дифференциальных уравнений в критических случаях. Для простоты ограничимся автономной ситуацией и будем считать, что система записана в канонических координатах Дарбу [6, 8]. Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений в четномерном линейном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{I}\, dH(\mathbf{x}), \tag{2.3.1}$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, гамильтониан H — некоторая гладкая функция, а матрица $\mathbf{I}$, так называемая симплектическая единица, имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Хотя по смыслу $\mathbf{x}$ является вектором, мы откажемся здесь от контравариантной записи компонент и будем далее пользоваться только нижними индексами Пусть начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия, т. е. $dH(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Для гамильтоновых систем устойчивость (соответственно неустойчивость) в прошлом и в будущем эквивалентны [125, 140]. Следствием этого общего факта является известная теорема: характеристический полином линейной гамильтоновой системы содержит только четные степени аргумента. Устойчивость возможна лишь в критических случаях, т. е. когда все собственные числа матрицы системы первого приближения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}\, d^2 H(\mathbf{0})\mathbf{x} \tag{2.3.2}$$

чисто мнимые или нулевые: $\lambda_{j,n+j} = \pm i\omega_j$, $\omega_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Далее мы остановимся только на этих критических случаях.

Для изучения проблемы существования асимптотических решений гамильтоновой системы (2.3.1) можно было бы воспользоваться сценарием, изложенным в § 1 настоящей главы. Первый шаг — процедура приведения системы к нормальной форме Пуанкаре. При этом нормализующее преобразование будет, вообще говоря, неканоническим, и полученные уравнения потеряют гамильтонову форму. Однако, интуитивно ясно, что условия существования асимптотических решений систем уравнений, имеющих гамильтонову форму, должны иметь более простой вид, чем в общем случае. Эта догадка подтверждается имеющимися результатами о существовании асимптотических решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы для *главных* резонансов [10, 9, 83, 84, 116]. В частности, в гамильтоновом случае не возникает проблем, связанных с алгебраической неразрешимостью, по крайней мере на низких уровнях вырождения. Поэтому естественно попытаться разработать аналогичную процедуру, учитывающую гамильтонову структуру исходных уравнений.

Рассмотрим разложение функции Гамильтона $H(\mathbf{x})$ в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Без ограничения общности можно считать, что $H(\mathbf{0}) = 0$, и что это разложение начинается с квадратичных членов:

$$H(\mathbf{x}) = H_2(\mathbf{x}) + \ldots.$$

Многоточие означает совокупность членов, порядок малости которых больше или равен трем.

При помощи вещественного невырожденного линейного симплектического преобразования квадратичная часть гамильтониана $H_2(\mathbf{x})$ может быть приведена к простейшему виду, так называемой нормальной форме. Мы будем также предполагать, что эта квадратичная нормализация уже проведена.

Если матрица $\mathbf{A}$ линеаризованной системы диагонализируема, то H_2 приводится к виду:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j (\omega_j^2 u_j^2 + v_j^2), \quad \sigma_j = \pm 1. \tag{2.3.3}$$

Пусть теперь матрица $\mathbf{A}$ подобна паре жордановых клеток нечетного порядка $n = 2k+1$ с чисто мнимыми собственными числами $\pm i\omega$. Тогда H_2 может быть приведена к виду:

$$H_2 = \frac{\sigma}{2} \left[\sum_{j=1}^{k} (\omega^2 u_{2j} u_{2k-2j+2} + v_{2j} v_{2k-2j+2}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{k} (\omega^2 u_{2j-1} u_{2k-2j+3} + v_{2j} v_{2k-2j+3}) \right] - \sum_{j=1}^{2k} u_j v_{j+1}. \tag{2.3.4}$$

Здесь и далее $\sigma = \pm 1$.

Если порядок жордановых клеток четен ($n = 2k$), то нормальная форма H_2 выглядит следующим образом:

$$H_2 = \frac{\sigma}{2} \left[\sum_{j=1}^{k} (\omega^{-2} v_{2j-1} v_{2k-2j+1} + v_{2j} v_{2k-2j+2}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{k} (\omega^2 u_{2j+1} u_{2k-2j+1} + u_{2j+2} u_{2k-2j+2}) \right] -$$
$$- \omega^2 \sum_{j=1}^{k} u_{2j-1} v_{2j} + \sum_{j=1}^{k} u_{2j} v_{2j-1}. \tag{2.3.5}$$

В дальнейшем нас будет особенно интересовать случай $k = 1$ (две степени свободы). В этом случае

$$H_2 = \frac{\sigma}{2} (\omega^{-2} v_1^2 + v_2^2) - \omega^2 u_1 v_2 + u_2 v_1. \tag{2.3.6}$$

Для пары жордановых клеток нечетного порядка $n = 2k+1$ с нулевыми собственными значениями нормальная форма имеет вид:

$$H_2 = \sum_{j=1}^{2k} u_j v_{j+1}. \tag{2.3.7}$$

Ясно, что $H_2 \equiv 0$, если $k = 0$.

Наконец, если $\mathbf{A}$ подобна *одной* жордановой клетке порядка $2k = 2n$ с собственным числом нуль, то квадратичная часть гамильтониана приводится к виду:

$$H_2 = \frac{\sigma}{2}\left[\sum_{j=1}^{k-1} u_j u_{k-j} - \sum_{j=1}^{k} v_j u_{k-j+1}\right] - \sum_{j=1}^{k-1} u_j v_{j+1}. \tag{2.3.8}$$

Если $k = 1$, то

$$H_2 = \frac{\sigma}{2} v_1^2. \tag{2.3.9}$$

Для двух степеней свободы ($k = 2$) эта нормальная форма имеет вид:

$$H_2 = \frac{\sigma}{2}\left[u_1^2 - 2v_1 v_2\right] - u_1 v_2. \tag{2.3.10}$$

Следует отметить, что гамильтонианы, отвечающие $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$, не переводятся друг в друга.

Общая ситуация описывается известной теоремой Вильямсона [197]:

Теорема 2.3.1. *Пусть все корни системы первого приближения* (2.3.2) *чисто мнимые или нулевые. Тогда либо гамильтониан приводится к виду* (2.3.3)*, либо симплектическое фазовое пространство системы распадается в прямую сумму попарно косоортогональных вещественных симплектических подпространств так, что H_2 представляется в виде суммы форм вида* (2.3.3)–(2.3.10) *на этих подпространствах.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли бесконечно дифференцируемых функций Гамильтона на $\mathbb{R}^{2n}$. Скобка Пуассона $\{\cdot\,,\cdot\}$ на $\mathfrak{g}$ задается стандартным образом:

$$\{F, G\} = \langle \mathbf{I}\, dF, dG\rangle = \langle d_u F, d_v G\rangle - \langle d_v F, d_u G\rangle.$$

Существует связь между скобкой Пуассона и коммутатором векторных полей на $\mathbb{R}^{2n}$:

$$[\mathbf{I}\, dF, \mathbf{I}\, dG] = \mathbf{I}\, d\{F, G\}. \tag{2.3.11}$$

Рассмотрим $n(2n+1)$-мерную подалгебру $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, элементы которой в некоторой фиксированной системе координат квадратичны. Из известной теоремы Картана о репликах (см., например, [4]) следует, что квадратичная форма H_2 может быть единственным образом представлена в виде суммы двух форм:

$$H_2(\mathbf{x}) = H_2'(\mathbf{x}) + H_2''(\mathbf{x}),$$

коммутирующих друг с другом:

$$\{H_2', H_2''\} = 0,$$

где H_2', H_2'' — соответственно полупростой и нильпотентный элементы подалгебры $\mathfrak{h}$.

Это означает, что матрица $\mathbf{I}\, d^2 H_2'$ диагонализируема, а $\mathbf{I}\, d^2 H_2''$ — нильпотентна. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что квадратичная форма H_2' имеет вид (2.3.3).

Рассмотрим некоторое каноническое преобразование $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto$ $\mapsto \mathbf{y} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, сохраняющее линейную часть системы (2.3.1). Пусть производящая функция этого преобразования $S = S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})$ раскладывается в формальный ряд Маклорена

$$S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \sum_{m=2}^{\infty} S_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}), \tag{2.3.12}$$

где $S_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})$ — однородные полиномы от «старых» координат $\mathbf{v}$ и «новых» импульсов $\boldsymbol{\xi}$ степени m.

Связь «старых» и «новых» переменных определяется зависимостями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= d_{\mathbf{v}} S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} + \sum_{m=2}^{\infty} d_{\mathbf{v}} S_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}), \\ \boldsymbol{\eta} &= d_{\boldsymbol{\xi}} S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{v} + \sum_{m=2}^{\infty} d_{\boldsymbol{\xi}} S_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

которые, к сожалению, не являются явными. Для того, чтобы получить явные зависимости, надо, например, из первого соотношения (2.3.13) выразить $\boldsymbol{\xi}$ как функцию переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, и подставить во второе соотношение.

«Новая» функция Гамильтона $G(\mathbf{y}) = G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ будет удовлетворять соотношению

$$H(d_{\mathbf{v}} S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{v}) = G(\boldsymbol{\xi}, d_{\boldsymbol{\xi}} S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})).$$

Как и $H(\mathbf{x})$, гамильтониан $G(\boldsymbol{y})$ имеет вид

$$G(\mathbf{y}) = G_2(\mathbf{y}) + \ldots,$$

причем

$$G_2(\mathbf{y}) = H_2(\mathbf{y}).$$

Запишем функцию Гамильтона $G(\mathbf{y})$ в виде

$$G(\mathbf{y}) = G_2'(\mathbf{y}) + F(\mathbf{y}),$$

где $G_2'(\mathbf{y}) = H_2'(\mathbf{y})$ означает «полупростую составляющую» квадратичной части гамильтониана $G(\mathbf{y})$.

Определение 2.3.1. [15] Будем говорить, что гамильтонова система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{I}\, dG(\mathbf{y}) \tag{2.3.14}$$

приведена к *нормальной форме Биркгофа*, если функции G_2' и F коммутируют, т. е.

$$\Big\{G_2'(\mathbf{y}), F(\mathbf{y})\Big\} \equiv 0. \tag{2.3.15}$$

Это определение означает, что (2.3.14) имеет группу симметрий, порожденную линейной гамильтоновой системой

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = \mathbf{I}\, dG_2'(\mathbf{y}).$$

Из существования гомоморфизма алгебры Ли функций Гамильтона на алгебру Ли векторных полей, задаваемого при помощи соотношения (2.3.11), следует, что если система (2.3.14) приведена к нормальной форме Биркгофа, то она имеет нормальную форму Пуанкаре.

Определение 2.3.1 допускает также интерпретацию на языке резонансов. Рассмотрим для простоты случай, когда в первом приближении система (2.3.14) невырождена:

$$\det(d^2 G(\mathbf{0})) \neq 0.$$

При помощи линейного симплектического преобразования перейдем к комплексным каноническим координатам:

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(i\alpha_j - \beta_j), \quad \eta_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}}(\alpha_j - i\beta_j), \quad j = 1, \ldots, n,$$

в которых G_2' имеет следующий вид

$$G_2' = -i\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \omega_j \alpha_j \beta_j.$$

Запишем разложение Маклорена функции $F = G - G_2'$

$$F = \sum_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_n} F_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_n} \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_n} \beta_1^{s_1} \ldots \beta_n^{s_n}$$

и рассмотрим три вектора: $\boldsymbol{\omega} = (\sigma_1\omega_1, \ldots, \sigma_n\omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение 2.3.2. Моном $F_{p_1,\ldots,p_n,s_1,\ldots,s_n} \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_n} \beta_1^{s_1} \ldots \beta_n^{s_n}$, $|\mathbf{p}| + |\boldsymbol{s}| \geqslant 3$ назовем *резонансным*, если

$$\langle \boldsymbol{\omega}_\sigma, \mathbf{p} - \boldsymbol{s} \rangle = 0. \tag{2.3.16}$$

При этом соотношение (2.3.16) называется *резонансом* порядка $r = |\mathbf{p}| + |\boldsymbol{s}|$.

Определение 2.3.3. Говорят, что система (2.3.14) записана в *нормальной форме Биркгофа*, если разложение функции $F - G_2''$ в ряд Маклорена содержит только резонансные мономы.

Это определение распространяется и на случай, когда система первого приближения (2.3.2) имеет несколько нулевых частот. В этом случае при замене $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ переменные, отвечающие нулевым частотам, не преобразуются.

Еще более наглядное представление о нормальной форме Биркгофа дает следующая конструкция. От декартовых канонических переменных $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ перейдем к полярным $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}$:

$$\xi_j = \sqrt{\frac{2\rho_j}{\omega_j}} \cos\theta_j, \quad \eta_j = \sqrt{2\omega_j\rho_j} \sin\theta_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В канонических полярных координатах квадратичная форма G_2' зависит только от импульсов $\boldsymbol{\rho}$:

$$G_2' = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \omega_j \rho_j.$$

Резонансные соотношения (2.3.16) можно переписать следующим образом:

$$\langle \boldsymbol{\omega}_\sigma, \mathbf{r} \rangle = 0, \tag{2.3.17}$$

$\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$, $r = |\mathbf{r}|$ — порядок резонанса.

Очевидно, что число независимых резонансных соотношений (2.3.17) не превосходит $n-1$. Пусть $\mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(n)} \in \mathbb{Z}^n$, $d \leqslant n-1$ — некоторый «максимальный» набор линейно независимых векторов таких, что

$$\langle \boldsymbol{\omega}_\sigma, \mathbf{r}^{(l)} \rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, d.$$

Введем резонансные фазы:

$$\phi_l = \langle \mathbf{r}^{(l)}, \boldsymbol{\theta} \rangle \bmod 2\pi, \quad l = 1, \ldots, d.$$

В новых переменных функция $F^* = F - G_2''$ зависит $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$. Можно показать (см., например, [125]), что если система приведена к нормальной форме Биркгофа, то можно подобрать такую систему векторов $\mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(d)}$, что

$$F^* = F^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}), \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_d), \quad (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d, \quad d \leqslant n-1,$$

т. е. зависимость от угловых переменных проявляется только в резонансных фазах. При этом нужно, конечно, иметь ввиду, что переменные $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}$ не являются каноническими.

Из этого факта можно сделать следующее полезное наблюдение (см., например, [125]). Пусть матрица линеаризованной системы (2.3.2) приводится к диагональному виду, т. е. $G_2''(\mathbf{y}) \equiv 0$. Линейно независимую систему векторов $\mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(d)}$ дополним линейно независимыми векторами $\mathbf{r}^{(d+1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(n)}$ до базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ так, что для любых $l = 1, \ldots, d$; $k = d+1, \ldots, n$

$$\langle \mathbf{r}^{(l)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = 0.$$

Тогда можно выписать $n-d$ независимых квадратичных формальных интегралов системы (2.3.14):

$$\begin{gathered} G_2^{(k)} = \langle \mathbf{r}^{(k)}, \boldsymbol{\rho} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j^{(k)} \rho_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j^{(k)} (\omega_j^2 \xi_j^2 + \eta_j^2), \\ k = d+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.3.18}$$

Сформулируем теорему о приводимости к нормальной форме.

Теорема 2.3.2 (Теорема Биркгофа). *Пусть все корни системы первого приближения* (2.3.2) *чисто мнимые или нулевые. Тогда гамильтонова система* (2.3.1) *может быть приведена к нормальной форме Биркгофа* (2.3.14).

Теория нормальных форм гамильтоновых систем уравнений существует также для случая, когда не все корни характеристического уравнения системы первого приближения лежат на мнимой оси. Однако, здесь мы ее рассматривать не будем, поскольку нас в этой главе интересуют лишь критические случаи. Идея алгоритма приведения к нормальной форме, использующего неявное каноническое преобразование с производящей функцией (2.3.12) принадлежит Биркгофу [15]. Существуют также схемы, позволяющие строить нормализующее преобразование в явном виде, например, так называемый метод Депри – Хори [156, 170]. Дальнейший обзор проблем, связанных с процедурой нормализации гамильтоновых систем, можно найти в [155]. Как и в случае приведения к нормальной форме Пуанкаре, преобразование, приводящее гамильтонову систему (2.3.1) к нормальной форме Биркгофа (2.3.14), является, как правило, расходящимся. В частности, расходится ряд (2.3.12), изображающий производящую функцию нормализующего преобразования. Причиной расходимости здесь, как и для преобразования к нормальной форме Пуанкаре, являются аномально малые знаменатели. Основной результат о расходимости установлен К. Зигелем [189] (см. также [63]).

Как и в общем случае, для гамильтоновых систем, записанных в нормальной форме, имеет место лемма о разделении движений. Введем обозначение:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}\, dG_2'(\mathbf{0}).$$

Лемма 2.3.1. *Линейная каноническая замена переменных*

$$\mathbf{y} = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{z} \tag{2.3.19}$$

переводит нормализованную систему уравнений (2.3.14) *в систему*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{I}\, dF(\mathbf{z}). \tag{2.3.20}$$

Поскольку записанная в нормальной форме Биркгофа гамильтонова система имеет также нормальную форму Пуанкаре, эта лемма является следствием леммы 2.1.1.

В системе (2.3.20) возможны дальнейшие упрощения, связанные с приведением к так называемой *обобщенной* нормальной форме Биркгофа – Густавсона, являющейся аналогом нормальной формы Белицкого [12] для общих систем дифференциальных уравнений (см., например, работу [157]). Однако, для наших конкретных целей получения условий существования асимптотических решений вполне достаточно воспользоваться процедурой приведения системы к нормальной форме Биркгофа в классическом варианте.

Итак, с этого момента основным объектом наших исследований становится система (2.3.20), к которой можно применить технику выделения квазиоднородных укорочений, описанную в предыдущей главе. Эта техника в рассматриваемом гамильтоновом случае также имеет некоторые особенности. Дело в том, что не всякая группа квазиоднородных растяжений

$$\mathbf{z} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}, \quad t \mapsto \mu^{-1}t \tag{2.3.21}$$

сохраняет гамильтонову структуру уравнений.

Кажется вполне естественным, что изучение поведения функции Гамильтона $F(\mathbf{z})$ под действием преобразования $\mathbf{z} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}$ должно составить основу исследования.

Определение 2.3.4. Функцию $F(\mathbf{z})$ назовем *квазиоднородной* степени $Q \in \mathbb{R}$ относительно структуры, порождаемой матрицей $\mathbf{G}$ и будем обозначать $F_Q(\mathbf{z})$, если

$$F_Q(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}) = \mu^Q F_Q(\mathbf{z}). \tag{2.3.22}$$

Если отвлечься от того факта, что матрица $\mathbf{G}$ *однозначно* определяет однопараметрическую группу (2.3.21) преобразований расширенного фазового пространства, то степень квазиоднородности некоторой конкретной функции определяется с точностью до мультипликативной постоянной. Умножение элементов матрицы $\mathbf{G}$ на некоторое действительное число a приводит к умножению Q на то же самое число.

Определение 2.3.5. Функцию $F(\mathbf{z})$ назовем *полуквазиоднородной* относительно структуры, порождаемой матрицей $\mathbf{G}$, если она может быть представлена в виде формальной суммы

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{m=0} F_{Q+\chi m}(\mathbf{z}), \tag{2.3.23}$$

такой, что для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполнено соотношение:

$$F(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}) = \sum_{m=0} \mu^{Q+\beta m} F_{Q+\chi m}(\mathbf{z}). \tag{2.3.24}$$

Если $\beta > 0$, то функцию $F(\mathbf{z})$ назовем *положительно полуквазиоднородной*, если же $\beta < 0$, то будем говорить об *отрицательной полук-*

вазиоднородности функции $F(\mathbf{z})$. Число $\chi = \pm 1$ назовем *знаком полуквазиоднородности*. Очевидно, что $F_{Q+\chi m}$ также являются квазиоднородными функциями более высоких при $\chi = +1$ (или более низких при $\chi = -1$) «степеней».

Итак, полуквазиоднородная функция — это функция, представимая в виде суммы
$$F(\mathbf{z}) = F_Q(\mathbf{z}) + F^*(\mathbf{z}),$$
где $F_Q(\mathbf{z})$ — квазиоднородное укорочение, а $F^*(\mathbf{z})$ — «хвост», не влияющий в определенном смысле на ее локальные свойства.

Понятие квазиоднородности и полуквазиоднородности функций также, как и в случае векторных полей, допускает трактовку с точки зрения диаграмм и многогранников Ньютона [23].

Пусть матрица $\mathbf{G}$ диагональна, $\mathbf{G} = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_N)$ (в нашем случае $N = 2n$), а функция $F(\mathbf{z})$ представима в виде формального ряда Маклорена
$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_N} F_{i_1,\ldots,i_N} z_1^{i_1} \ldots z_N^{i_N}, \tag{2.3.25}$$
где $i_1, \ldots, i_N$ — целые неотрицательные числа.

Определение 2.3.6. Пусть $F_{i_1,\ldots,i_N} z_1^{i_1} \ldots z_N^{i_N}$ — некоторый нетривиальный моном разложения (2.3.25). В пространстве $\mathbb{R}^N$ отметим геометрическую точку с координатами $(i_1, \ldots, i_N)$. Совокупность всех таких точек назовем *диаграммой Ньютона* $\mathfrak{D}$ функции $F(\mathbf{z})$, а ее выпуклую оболочку — *многогранником Ньютона* $\mathfrak{P}$.

Очевидно, что показатели мономов квазиоднородного укорочения лежат в гиперплоскости π_Q, задаваемой уравнением
$$g_1 i_1 + \ldots g_N i_N = Q. \tag{2.3.26}$$

Эта гиперплоскость «подпирает» многогранник Ньютона $\mathfrak{P}$ в случае положительной полуквазиоднородности, т. е. если Γ — грань $\mathfrak{P}$, лежащая в π_Q, то для любых $(i_1, \ldots, i_N) \in \mathfrak{P} \setminus \Gamma$ выполнено неравенство
$$g_1 i_1 + \ldots g_N i_N > Q. \tag{2.3.27}$$

В случае же отрицательной полуквазиоднородности π_Q «накрывает» многогранник Ньютона $\mathfrak{P}$, т. е.
$$g_1 i_1 + \ldots g_N i_N < Q \tag{2.3.28}$$
для любых $(i_1, \ldots, i_N) \in \mathfrak{P} \setminus \Gamma$.

Пусть элементы матрицы $\mathbf{G}$ — рациональные неотрицательные числа. Очевидно, что любую представимую в виде ряда (2.3.25) функцию можно разложить в ряд (2.3.23) по квазиоднородным формам, т. е. любая функция $F(\mathbf{z})$ указанного вида является положительно полуквазиоднородной. Алгоритм такого разложения основан на геометрическом истолковании неравенств (2.3.27), (2.3.28). Рассмотрим семейство гиперплоскостей π_Q, задаваемое равенствами (2.3.26) при непрерывном изменении параметра Q от нуля до бесконечности. При некотором $Q = Q^*$ эта гиперплоскость коснется многогранника $\mathfrak{P}$. Точки диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}$, попавшие на данную гиперплоскость, определят квазиоднородное укорочение $F_{Q^*}(\mathbf{z})$. При дальнейшем увеличении параметра точки $\mathfrak{D}$ будут попадать на π_Q лишь при дискретных значениях Q, расстояния между которыми будут кратны некоторому положительному рациональному числу β. Точки диаграммы Ньютона, попадающие на π_Q при фиксированном $Q > Q^*$, дадут высшие квазиоднородные формы в разложении (2.3.23). Если $F(\mathbf{z})$ — полином, т. е. диаграмма Ньютона $\mathfrak{D}$ содержит конечное число точек, то $F(\mathbf{z})$ можно считать также отрицательно полуквазиоднородной функцией, проведя аналогичную процедуру, но уменьшая Q с некоторого значения $Q_{\max}$ до нуля.

Может показаться вполне естественным, что градиент квазиоднородной (полуквазиоднородной) функции является квазиоднородным (полуквазиоднородным) векторным полем. Однако легко видеть, что это в общем случае не так. Найдем условия, достаточные для того, чтобы гамильтонова система уравнений с квазиоднородным гамильтонианом была бы квазиоднородной.

Имеет место

Лемма 2.3.2. *Под действием преобразования* (2.3.21) *градиент квазиоднородной функции преобразуется следующим образом:*

$$dF_Q(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{z}) = \mu^{-\mathbf{G}^T+Q\mathbf{E}}\, dF_Q(\mathbf{z}), \tag{2.3.29}$$

где знак $(\cdot)^T$ *означает транспонирование.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (2.3.22) и дадим малое приращение $\Delta\mathbf{z}$ переменной $\mathbf{z}$:

$$F_Q\big(\mu^{\mathbf{G}}(\mathbf{z}+\Delta\mathbf{z})\big) = F_Q\big(\mu^{\mathbf{G}}(\mathbf{z})\big) + \big\langle dF_Q\big(\mu^{\mathbf{G}}(\mathbf{z})\big), \mu^{\mathbf{G}}\Delta\mathbf{z}\big\rangle + o\big(\|\Delta\mathbf{z}\|\big) =$$
$$= \mu^Q\Big(F_Q(\mathbf{z}) + \big\langle dF_Q(\mathbf{z}), \Delta\mathbf{z}\big\rangle\Big) + o\big(\|\Delta\mathbf{z}\|\big).$$

Приравнивая коэффициенты при линейных относительно $\Delta\mathbf{z}$ слагаемых, получим равенство (2.3.29).

Лемма доказана.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда квазиоднородная группа, задаваемая матрицей $\mathbf{G}$, независимо преобразует координаты и импульсы. За компонентами переменной $\mathbf{z}$ сохраним для простоты прежние обозначения $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, которые использовались ранее для компонент переменной $\mathbf{y}$. Положим

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\boldsymbol{\xi}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\boldsymbol{\eta}} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.3.3. *Если имеет место матричное равенство:*

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{G}_{\boldsymbol{\eta}}^T = (Q-1)\mathbf{E}, \tag{2.3.30}$$

то система (2.3.20) *является квазиоднородной.*

Доказательство следует из леммы 2.3.2. Действительно,

$$d_\xi F_Q\big(\mu^{\mathbf{G}_\xi}\boldsymbol{\xi}, \mu^{\mathbf{G}_\eta}\boldsymbol{\eta}\big) = \mu^{-\mathbf{G}_\xi^T + Q\mathbf{E}}\, d_\xi F_Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$
$$d_\eta F_Q\big(\mu^{\mathbf{G}_\xi}\boldsymbol{\xi}, \mu^{\mathbf{G}_\eta}\boldsymbol{\eta}\big) = \mu^{-\mathbf{G}_\eta^T + Q\mathbf{E}}\, d_\eta F_Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

Поэтому при выполнении равенства (2.3.30) гамильтонова система уравнений с гамильтонианом F_Q будет квазиоднородной.

Лемма доказана.

Очевидно, что гамильтонова система с *полу*квазиоднородным гамильтонианом при выполнении (2.3.30) является *полу*квазиоднородной.

При выборе укорочения необходимо учитывать следующее обстоятельство. Матрицы $\mathbf{G}_\xi$ и $\mathbf{G}_\eta$ должны удовлетворять равенству (2.3.30), содержащему величину Q в качестве параметра. Таким образом, мы фиксируем *заранее* также и *степень* квазиоднородного укорочения, которое должно быть выделено, например, при анализе многогранника Ньютона гамильтониана $F(\mathbf{z})$. Если же полученное укорочение имеет другую степень, то следует рассмотреть другую пару матриц $\mathbf{G}_\xi$ и $\mathbf{G}_\eta$.

Как и ранее, мы рассмотрим модельную систему

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{I}\, dF_Q(\mathbf{z}) \tag{2.3.31}$$

и изучим вопрос о существовании частных решений этой системы в виде квазиоднородных лучей.

Как отмечалось выше, в общем случае при наличии d независимых резонансов система (2.3.20) имеет $n-d$ независимых формальных интегралов (2.3.18). Гамильтоновы векторные поля вида

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\sigma} = \mathbf{I}\, dG_2^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, n-d$$

порождают группы симметрии рассматриваемой системы (2.3.20).

Матрицы, порождающие различные квазиоднородные структуры для системы (2.3.31), можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{G} + \sum_{j=1}^{n-d} \delta_k \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{I}\, d^2 G_2^{(k)}(\mathbf{0}), \quad k = 1, \ldots, n-d. \qquad (2.3.32)$$

Здесь $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-d})$ — набор произвольных параметров, $\mathbf{G}$ — некоторая заранее найденная матрица, относительно которой система (2.3.31) является квазиоднородной (а (2.3.20) — полуквазиоднородной), коммутирующая со всеми матрицами $\mathbf{D}_k$.

Для гамильтонова случая можно сформулировать аналог теоремы 2.1.2.

Теорема 2.3.3. *Пусть система* (2.3.20) *положительно полуквазиоднородна в* **гамильтоновом смысле** *относительно структуры с некоторой матрицей* $\mathbf{G}$ *с положительными собственными числами. Основываясь на* (2.3.32)*, рассмотрим вспомогательный гамильтониан*

$$F_{\boldsymbol{\delta}} = F_Q(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^{n-d} \delta_k G_2^{(k)}, \qquad (2.3.33)$$

где матрицы $\mathbf{I}\, d^2 G_2^{(k)}(\mathbf{0})$ *коммутируют с* $\mathbf{G}$.

Пусть существует такой набор параметров $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-d})$*, ненулевой вектор* $\mathbf{z}_0^\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ *и число* $\gamma = \pm 1$*, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений*

$$-\gamma \mathbf{G} \mathbf{z}_0^\gamma = \mathbf{I}\, dF_\sigma(\mathbf{z}_0^\gamma). \qquad (2.3.34)$$

Тогда исходная система (2.3.1) *имеет асимптотическое решение* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Доказательство основано на применении теоремы 2.1.2.

Аналогично формулируется утверждение о неустойчивости.

Теорема 2.3.4. *Пусть система линейного приближения* (2.3.2) *имеет только нулевые или чисто мнимые корни, а нормализованная система* (2.3.14) *такова, что полученная из нее при помощи отбрасывания в функции Гамильтона квадратичных членов, отвечающих диагонализируемой составляющей матрицы первого приближения, система положительно полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой некоторой матрицей* $\mathbf{G}$ *с положительными собственными числами. Если для некоторого вспомогательного гамильтониана* (2.3.33) *найдется ненулевой вектор* $\mathbf{z}_0^- \in \mathbb{R}^{2n}$*, удовлетворяющий системе алгебраических уравнений*

$$\mathbf{G} \mathbf{z}_0^- = \mathbf{I}\, dF_\delta(\mathbf{z}_0^-), \qquad (2.3.35)$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.3.1) *неустойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на факте существования частного асимптотического решения системы (2.3.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$, вытекающего из (2.3.35).

Если $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$, то «опорное» решение укороченной системы представляет собой закрученный луч.

Вполне возможно, что если (2.3.34) имеет решение $\mathbf{z}_0^+$ при $\gamma = +1$, то существует и решение $\mathbf{z}_0^-$ $(\gamma = -1)$ для того же самого набора параметров δ. Это утверждение подтверждается всеми известными на данный момент примерами и отвечает свойству обратимости гамильтоновых систем.

Для иллюстрации описанного метода рассмотрим задачу о существовании асимптотических траекторий и устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем уравнений с двумя степенями свободы в случае нейтральной системы первого приближения. Рассмотрим сначала случай, когда обе частоты ненулевые, а матрица линеаризованной системы приводится к диагональному виду.

При помощи замены

$$\xi_j \mapsto \frac{1}{\sqrt{\omega_j}}\xi_j, \quad \eta_j \mapsto \sqrt{\omega_j}\eta_j, \quad j = 1, 2$$

квадратичная часть нормализованного гамильтониана примет следующий, более удобный для дальнейших исследований, вид:

$$H_2 = G_2 = \frac{1}{2}\big(\sigma_1\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \sigma_2\omega_2(\xi_2^2 + \eta_2^2)\big).$$

Если величины σ_1 и σ_2 имеют одинаковые знаки, то гамильтониан H может быть использован в качестве функции Ляпунова, откуда следует устойчивость рассматриваемого положения равновесия. Отбрасывая этот тривиальный случай, далее без ограничения общности будем считать, что $\sigma_1 = +1$, а $\sigma_2 = -1$.

Известная теорема Арнольда–Мозера [5, 88] утверждает, что если в системе отсутствуют резонансы вплоть до четвертого порядка, т. е.

$$r_1\omega_1 - r_2\omega_2 \neq 0, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{N}, \quad r_1 + r_2 \leqslant 4,$$

то в системе, *как правило*, имеет место устойчивость, и асимптотические решения отсутствуют.

Это выражение «как правило» означает, что для устойчивости должно выполняться еще некоторое неравенство на коэффициенты формы четвертой степени в разложении нормализованной функции Гамильтона, гарантирующее, что в пространстве гамильтоновых систем, частоты малых колебаний которых не находятся в резонансе, неустойчивые системы имеют «меру нуль». Интересные дополнения к данной теореме можно найти в работе Брюно [24].

Итак, мы рассмотрим проблему устойчивости положений равновесия и существования асимптотических решений гамильтоновых систем уравнений при наличии резонансов между частотами. Основные результаты в этом направлении получены в работах [10, 9, 82, 83, 84, 103, 104, 105, 102, 116]. Мы дадим этим результатам несколько иную интерпретацию и дополним их некоторыми новыми. Заметим сначала, что в двумерном пространстве «единственным» вектором, перпендикулярным вектору $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, является вектор с координатами (ω_1, ω_2). Поэтому G_2 является единственным с точностью до ненулевого множителя нетривиальным квадратичным интегралом нормализованной системы и вспомогательный гамильтониан (2.3.32), фигурирующий в формулировках теорем 2.3.3 и 2.3.4, будет иметь вид

$$F_\delta(\mathbf{z}) = F_Q(\mathbf{z}) + \delta G_2(\mathbf{z}). \tag{2.3.36}$$

В рассматриваемых «строго полупростых» случаях, т. е. когда матрица системы первого приближения диагонализируема, $F_Q(\mathbf{z})$ будут однородными функциями третьей или четвертой степени.

Пример 2.3.1. Резонанс 1 : 2. Этот резонанс является самым простым. Пусть $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $\omega_1 = 2\omega_2 = \omega$. Укороченный гамильтониан F_Q представляет собой совокупность кубических слагаемых в нормальной форме (см., например, [82]):

$$F_3 = a\bigl(\eta_1(\xi_2^2 - \eta_2^2) + 2\xi_1\xi_2\eta_2\bigr). \tag{2.3.37}$$

В этом и последующих примерах мы будем приводить готовые формулы для первых неквадратичных членов нормализованных гамильтонианов, ссылаясь на оригинальные статьи и опуская вычислительные подробности. Заметим только, что эти формулы можно получить из условия коммутирования искомых функций с G_2.

В рассматриваемом случае параметр δ можно положить равным нулю. Гамильтонова система уравнений с гамильтонианом (2.3.37) *почти всегда* имеет два однопараметрических семейства частных прямолинейных решений вида:

$$\mathbf{z}^{\pm}(t)\left(\frac{1}{\pm\, t}\xi^{\pm}_{1_0}, \frac{1}{\pm\, t}\eta^{\pm}_{1_0}, \frac{1}{\pm\, t}\xi^{\pm}_{2_0}, \frac{1}{\pm\, t}\eta^{\pm}_{2_0},\right)$$

где $\mathbf{z}_0^{\pm} = \bigl(\xi^{\pm}_{1_0}, \eta^{\pm}_{1_0}, \xi^{\pm}_{2_0}, \eta^{\pm}_{2_0}\bigr)$ — собственные векторы гамильтонова векторного поля с гамильтонианом (2.3.37),

$$\begin{aligned} \xi^{\pm}_{1_0} &= \pm\sqrt{2r}\cos 2\phi, & \eta^{\mp}_{1_0} &= \pm\sqrt{2r}\sin 2\phi, \\ \xi^{\pm}_{2_0} &= \pm 2\sqrt{r}\cos\phi, & \eta^{\mp}_{2_0} &= \pm 2\sqrt{r}\sin 2\phi, \end{aligned}$$

ϕ — параметр семейств, а

$$r = \frac{1}{8a^2}.$$

Таким образом, при

$$a \neq 0$$

исследуемая система имеет два однопараметрических семейства асимптотических решений, одно из которых стремится к положению равновесия при $t \to +\infty$, другое — при $t \to -\infty$. Существование последнего семейства означает неустойчивость. Таким образом, неустойчивость в гамильтоновой системе при резонансе $1:2$ является типичной. Рассмотрение случая $a = 0$ требует дополнительных исследований.

Пример 2.3.2. Резонанс $1:3$. Пусть $r_1 = 1$, $r - 2 = 3$, $\omega_1 = 3\omega_2 = \omega$. Укороченный гамильтониан F_Q представляет собой совокупность членов четвертой степени в нормальной форме (см., например, [82]):

$$\begin{aligned} F_4 = &a\big(\xi_1\eta_2(3\xi_2^2 - \eta_2^2) + \xi_2\eta_1(\xi_2^2 - 3\eta_2^2)\big) + \\ &+ c_{02}(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + c_{11}(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2) + c_{20}(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2. \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Найдем условия, при которых укороченная гамильтонова система с гамильтонианом (2.3.38) имеет два однопараметрических семейства решений в виде закрученных лучей:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{\pm}(t) = \Big(&\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\xi_{1_0}^{\pm}\cos(3\delta\omega\ln(\pm t)) - \eta_{1_0}^{\pm}\sin(3\delta\omega\ln(\pm t))\big), \\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\eta_{1_0}^{\pm}\cos(3\delta\omega\ln(\pm t)) + \xi_{1_0}^{\pm}\sin(3\delta\omega\ln(\pm t))\big), \\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\xi_{2_0}^{\pm}\cos(\delta\omega\ln(\pm t)) - \eta_{2_0}^{\pm}\sin(\delta\omega\ln(\pm t))\big), \\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\eta_{2_0}^{\pm}\cos(\delta\omega\ln(\pm t)) + \xi_{2_0}^{\pm}\sin(\delta\omega\ln(\pm t))\big)\Big). \end{aligned}$$

Положим:

$$A = 3c_{02} + 3c_{11} + c_{20}, \quad B = 3\sqrt{3}a$$

и рассмотрим сначала случай

$$|B| > |A|. \tag{2.3.39}$$

Векторы $\mathbf{z}_0^{\pm} = (\xi_{1_0}^{\pm}, \eta_{1_0}^{\pm}, \xi_{2_0}^{\pm}, \eta_{1_0}^{\pm})$,

$$\begin{aligned} \xi_{1_0}^{\pm} &= \sqrt{2r}\cos(\psi^{\pm} - 3\phi), \qquad & \eta_{1_0}^{\pm} &= \sqrt{2r}\sin(\psi^{\pm} - 3\phi), \\ \xi_{2_0}^{\pm} &= \sqrt{6r}\cos\phi, & \eta_{2_0}^{\pm} &= \sqrt{6r}\sin\phi, \end{aligned}$$

где ϕ — параметр семейств,

$$\psi^{\pm} = {}^{\pi}\!/_{2}(1 \mp 1) \mp \arcsin\frac{A}{B}$$

— резонансная фаза, а

$$r = \frac{1}{4\sqrt{B^2 - A^2}},$$

являются собственными векторами гамильтонова векторного поля со вспомогательным гамильтонианом (2.3.36) при

$$\delta = 2r\frac{3c_{02} - c_{11} - c_{20}}{\omega}.$$

Итак, при выполнении неравенства (2.3.39) исследуемая система имеет два однопараметрических семейства асимптотических решений, что означает неустойчивость. Известно, что при нарушении (2.3.39), т. е. если $|B| < |A|$, положение равновесия исследуемой системы устойчиво [82]. Таким образом, в пространстве параметров укороченной системы множество значений параметров, при которых имеет место устойчивость, имеет положительную меру.

Пример 2.3.3. Резонанс 1 : 1 при отсутствии жордановых клеток. В этом случае $r_1 = r_2 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Укороченная функция Гамильтона F_Q представляет собой совокупность членов четвертой степени в нормальной форме (см., например, [103]):

$$\begin{aligned} F_4 = &(\xi_1^2 + \eta_1^2)\big(a(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + b(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\big) + \\ &+ (\xi_2^2 + \eta_2^2)\big(c(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + d(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\big) + \\ &+ e\big(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2)^2 - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)^2\big) + \\ &+ c_{02}(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + c_{11}(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2) + c_{20}(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2. \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Если выполнены некоторые дополнительные условия, то модельная гамильтонова система с гамильтонианом (2.3.40), также как и при резонансе $1:3$, имеет два однопараметрических семейства решений в виде закрученных лучей:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{\pm}(t) = \Big(&\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\xi^{\pm}_{1_0}\cos(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big) - \eta^{\pm}_{1_0}\sin\big(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big),\\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\eta^{\pm}_{1_0}\cos(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big) + \xi^{\pm}_{1_0}\sin\big(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big),\\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\xi^{\pm}_{2_0}\cos(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big) - \eta^{\pm}_{2_0}\sin\big(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big),\\ &\frac{1}{\sqrt{\pm t}}\big(\eta^{\pm}_{2_0}\cos(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big) + \xi^{\pm}_{2_0}\sin\big(\delta^{\pm}\omega\ln(\pm t)\big)\Big).\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию:

$$\Psi(\psi) = c_{02} + c_{11} + c_{20} + (a+c)\cos\psi + (b+d)\sin\psi + e\cos 2\psi. \quad (2.3.41)$$

Предположим, что функция (2.3.41) имеет вещественный корень такой, что ее производная, вычисленная на этом корне, не равна нулю. Функция (2.3.41) — гладкая и 2π-периодическая. Легко сообразить, что если существует корень ψ^+ уравнения $\Psi(\psi) = 0$, такой что $\Psi'(\psi^+) > 0$, то существует также корень ψ^- этого уравнения, для которого $\Psi'(\psi^-) > 0$.

Собственные векторы $\mathbf{z}_0^{\pm} = (\xi^{\pm}_{1_0}, \eta^{\pm}_{1_0}, \xi^{\pm}_{2_0}, \eta^{\pm}_{2_0})$ гамильтонова векторного поля со вспомогательным гамильтонианом (2.3.36) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi^{\pm}_{1_0} &= \sqrt{2r^{\pm}}\cos(\psi^{\pm} - \phi), & \eta^{\pm}_{1_0} &= \sqrt{2r^{\pm}}\sin(\psi^{\pm} - \phi),\\ \xi^{\pm}_{2_0} &= \sqrt{6r^{\pm}}\cos\phi, & \eta^{\pm}_{2_0} &= \sqrt{6r^{\pm}}\sin\phi,\end{aligned}$$

где ϕ — параметр семейств, а резонансные фазы $\psi^{\pm}$ являются корнями функции (2.3.41),

$$r^{\pm} = \pm\frac{1}{4\Psi'(\psi^{\pm})}.$$

Значение параметра δ во вспомогательном гамильтониане (2.3.36) вычисляется по формуле:

$$\delta = \delta^{\pm} = -2r^{\pm}\frac{2(c_{20} - c_{02}) + (a-c)\cos\psi^{\pm} + (b-d)\sin\psi^{\pm}}{\omega}.$$

Таким образом, если функция (2.3.41) имеет корни, на которых ее производная не равна нулю, то исследуемая система имеет два однопараметрических семейства асимптотических решений, стремящихся к положению равновесия либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$, что гарантирует неустойчивость. Если же функция (2.3.41) не имеет действительных корней, то, как показано в [103], имеет место устойчивость по Ляпунову. Как и в предыдущем примере, при резонансе $1:1$ устойчивость *не является* исключительной.

Рассматриваемый ниже пример уже не относится к классу «строго полупростых» случаев.

Пример 2.3.4. Резонанс 1: 1 при наличии двух двумерных жордановых клеток. Нам фактически необходимо вычислить нелинейные члены невысоких степеней нормальной формы гамильтоновой системы, квадратичная часть которой имеет вид (2.3.6). Для решения этой задачи можно воспользоваться нормальной формой, полученной в предыдущем примере.

Линейное каноническое преобразование

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(u_2 + v_1), \quad v_1 \mapsto \sqrt{\frac{\omega}{2}}(v_2 - u_1), \\ u_2 &\mapsto -\sqrt{\frac{\omega}{2}}(v_2 + u_1), \quad v_2 \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(u_2 - v_1) \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

переводит квадратичную часть (2.3.6) гамильтониана задачи в квадратичную форму

$$H_2 = H_2' + H_2'', \quad H_2' = \frac{\omega}{2}\big((u_1^2 + v_1^2) - (u_2^2 + v_2^2)\big),$$

$$H_2'' = \frac{\sigma}{4\omega}\big((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_1)^2\big), \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Приведем систему к нормальной форме Биркгофа $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$. Совокупность членов четвертой степени нормализованного гамильтониана также, как и в предыдущем случае, будет иметь вид (2.3.40). Линейное каноническое преобразование, обратное к (2.3.42), даст нам необходимую нормальную форму. Выражения для членов четвертой степени в этом случае достаточно громоздки, поэтому мы выписывать их здесь не будем. Отбросив «полупростую составляющую» квадратичной части, получим гамильтониан системы типа (2.3.20).

Рассмотрим группу квазиоднородных растяжений

$$\xi_j \mapsto \mu\xi_j, \quad \eta_j \mapsto \mu^2\eta_j, \quad j = 1, 2.$$

Из (2.3.6), (2.3.40), (2.3.42) следует, что из функции Гамильтона системы типа (2.3.20) эта группа «высекает» квазиоднородное укорочение

$$F_4 = \frac{1}{2}\Big(\sigma(\omega^{-2}\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{A}{2}(\omega\xi_1^2 + \omega^{-1}\xi_2^2)^2\Big), \tag{2.3.43}$$

где

$$A = b + d - e + c_{20} + c_{11} + c_{02}.$$

В этом случае степень квазиоднородности равна четырем.

Матрица используемой группы преобразований удовлетворяет соотношению (2.3.30), поэтому гамильтонова система с гамильтонианом (2.3.43) будет квазиоднородной.

Модельная гамильтонова система с гамильтонианом (2.3.43) имеет два решения в виде квазиоднородных лучей:

$$\mathbf{z}^{\pm}(t) = \Big(\frac{1}{\pm\, t}\xi_{1_0}^{\pm}, \frac{1}{(\pm t)^2}\eta_{1_0}^{\pm}, \frac{1}{\pm\, t}\xi_{2_0}^{\pm}, \frac{1}{(\pm t)^2}\eta_{2_0}^{\pm}\Big),$$

где

$$\xi_{1_0}^{\pm} = \xi_{2_0}^{\pm} = \xi_0 = \big(-A\sigma(1+\omega^{-2})\big)^{-1/2}, \quad \eta_{1_0}^{\pm} = \mp\sigma\omega^2\xi_0, \quad \eta_{2_0}^{\pm} = \mp\sigma\xi_0,$$

при условии

$$A\sigma < 0. \tag{2.3.44}$$

Таким образом, если выполнено неравенство (2.3.44), то исследуемая система имеет два асимптотических решения, стремящихся к положению равновесия либо при $\to +\infty$, либо при $\to -\infty$, что гарантирует неустойчивость. Если же имеет место неравенство, противоположное (2.3.44), то, как показано в [103], система устойчива по Ляпунову. Следовательно, и в этой задаче устойчивость не является исключительной. Достаточное условие неустойчивости (2.3.44) было получено в работе [103], исходя из других соображений. К системе применялось еще одно нелинейное каноническое преобразование, позволяющее «убить» ряд членов четвертой степени в нормальной форме. Это преобразование аналогично преобразованию к обобщенной нормальной форме Биркгофа–Густавсона [157]. Мы получили это неравенство, исходя лишь из классической нормальной формы Биркгофа.

Перейдем к рассмотрению задач, одна или обе собственных частоты которых равны нулю.

Пример 2.3.5. Одна нулевая частота при отсутствии жордановой клетки. Пусть $\omega_1 - \omega \neq 0$, $\omega_2 = 0$. При помощи преобразования

$$\xi_1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{\omega}}, \quad \eta_1 \mapsto \sqrt{\omega}\eta_1$$

квадратичная часть функции Гамильтона нормализованной системы может быть приведена к следующему простому виду:

$$H_2 = G_2 = \frac{\omega}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2).$$

Может случиться так, что несколько первых неквадратичных однородных форм G_m, $m = 3, \ldots, M-1$ разложения гамильтониана $G(\mathbf{y})$ окажутся равными нулю. Тогда укороченный гамильтониан будет иметь вид [104]

$$F_M = \sum_{k=0}^{[M/2]} f_{M-2k}(\xi_2, \eta_2)(\xi_1^2 + \eta_1^2)^k, \tag{2.3.45}$$

где f_{M-2k} — однородные полиномы переменных ξ_2, η_2 степеней $M - 2k$.

Система с гамильтонианом (2.3.45) имеет, очевидно, инвариантное многообразие $\xi_1 = \eta_1 = 0$. На этом инвариантном многообразии система с однородным гамильтонианом (2.3.45) будет иметь вид

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial f_M}{\partial \eta_2}(\xi_2, \eta_2), \quad \dot{\eta}_2 = \frac{\partial f_M}{\partial \xi_2}(\xi_2, \eta_2). \tag{2.3.46}$$

Будем искать условия существования асимптотических решений системы (2.3.46) вида

$$\xi_2^{\pm}(t) = \frac{1}{(\pm t)^{\alpha}} \xi_{2_0}^{\pm}, \quad \eta_2^{\pm}(t) = \frac{1}{(\pm t)^{\alpha}} \eta_{2_0}^{\pm}, \quad \alpha = \frac{1}{M-2}.$$

Поскольку однородная функция f_M — первый интеграл системы (2.3.46), то

$$f_M(\xi_{2_0}^{\pm}, \eta_{2_0}^{\pm}) = 0.$$

Через $\mathbf{c}_0^{\pm} = \|\mathbf{c}_0^{\pm}\| \mathbf{e}_0^{\pm}$ обозначим двумерный вектор с координатами $(\xi_{2_0}^{\pm}, \eta_{2_0}^{\pm})$, $\mathbf{e}_0^{\pm}$ — единичный вектор. Тогда по теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$M f_M(\mathbf{e}_0^{\pm}) = \langle d f_M(\mathbf{e}_0^{\pm}), \mathbf{e}_0^{\pm} \rangle = 0,$$

т. е. любой вектор $\mathbf{e}_0^{\pm}$, являющийся нулем функции f_M, перпендикулярен градиенту этой функции, вычисленному в $\mathbf{e}_0^{\pm}$.

Предположим, что множество нулей функции f_M не совпадает с множеством нулей ее градиента (это означает, что форма f_M во всяком случае знакопеременна). Пусть $\mathbf{e}_0^{\pm}$ — единичный вектор, такой, что $f_M(\mathbf{e}_0^{\pm}) = 0$, а $df_M(\mathbf{e}_0^{\pm}) \neq 0$. Тогда существует такое число $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, что

$$\mathbf{I}\, df_M(\mathbf{e}_0^{\pm}) = a\mathbf{e}_0^{\pm}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $a > 0$, то (2.3.46) имеет асимптотическое решение при $t \to -\infty$, и $\|\mathbf{c}_0^-\| = ({}^{\alpha}\!/_{a})^{\alpha}$, в противном же случае ($a < 0$) (2.3.46) имеет асимптотическое решение при $t \to +\infty$, и $\|\mathbf{c}_0^+\| = ({}^{\alpha}\!/_{a})^{\alpha}$.

Тем не менее легко показать, что если существуют точки на единичной окружности, в которых градиент функции f_M касается этой окружности и направлен «против часовой стрелки», то существуют точки, в которых этот градиент касается окружности и направлен «по часовой стрелке». Для этого достаточно воспользоваться периодичностью функции $\Psi(\psi) = f_M(\cos\psi, \sin\psi)$ и ее производной. Это доказывает, что (2.3.46) имеет асимптотические решения, как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Следовательно, условием неустойчивости и существования асимптотических траекторий исследуемой системы является следующее: множество нулей однородной формы f_M не совпадает с множеством нулей ее градиента. В этой рассматриваемой задаче, по крайней мере при четном M, устойчивость также не является исключительным явлением: как показано в работе [104], если форма f_M является знакоопределенной, то имеет место устойчивость по Ляпунову.

ПРИМЕР 2.3.6. Одна нулевая частота при наличии двумерной жордановой клетки. В соответствии с теоремой 2.3.1 (теоремой Вильямсона) квадратичная часть гамильтониана задачи может быть приведена к виду:

$$H_2 = \frac{\omega}{2}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{\sigma}{2}v_2^2. \tag{2.3.47}$$

Приведем систему к нормальной форме Биркгофа и предположим снова, что некоторое количество форм G_m, $m = 3, \ldots, M-1$ разложения гамильтониана $G(\mathbf{y})$ тождественно равны нулю, а M-я форма F_M имеет, как и в предыдущем случае, вид (2.3.45).

Запишем разложения однородных форм f_{M-2k} в суммы элементарных мономов

$$f_{M-2k}(\xi_2, \eta_2) = \sum_{l=0}^{M-2k} f_{M-2k}^{M-2k-l,i}\xi_2^{M-2k-l}\eta_2^l$$

и рассмотрим квазиоднородную шкалу, удовлетворяющую (2.3.30):

$$\xi_j \mapsto \mu^{2\alpha}\xi_j, \quad \eta_j \mapsto \mu^{2\alpha+1}\eta_j, \quad j = 1, 2, \quad \alpha = \frac{1}{M-2}.$$

Используя (2.3.45), (2.3.47), нетрудно показать, что в рассматриваемом случае эта шкала «высекает» из гамильтониана системы типа (2.3.20) следующее квазиоднородное укорочение:

$$F_Q = \frac{\sigma}{2}\eta_2^2 \sum_{k=0}^{[M/2]} f_{M-2k}^{M-2k,0}\xi_2^{M-2k}\eta_1^{2k}, \quad Q = 2\alpha M. \tag{2.3.48}$$

Гамильтонова система уравнений с гамильтонианом (2.3.48) имеет инвариантное многообразие $\xi_1 = \eta_1 = 0$, на котором укороченная система принимает вид

$$\dot{\xi}_2 = \sigma\eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = M f_M^{M,0}\xi_2^{M-1}. \tag{2.3.49}$$

Система (2.3.49) имеет два асимптотических решения

$$\xi_2^{\pm}(t) = \frac{1}{(\pm t)^{2\alpha}}\xi_{2_0}^{\pm}, \quad \eta_2^{\pm}(t) = \frac{1}{(\pm t)^{2\alpha+1}}\eta_{2_0}^{\pm},$$

где

$$\xi_{2_0}^{\pm} = \xi_0 = \left(-\frac{2\alpha(2\alpha+1)\sigma}{M f_M^{M,0}}\right)^{\alpha}, \quad \eta_{2_0}^{\pm} = \pm 2\sigma\alpha\xi_0,$$

при выполнении одного из двух условий:

a) M нечетно, и

$$f_M^{M,0} \neq 0,$$

b) M четно и имеет место неравенство

$$\sigma f_M^{M,0} < 0. \tag{2.3.50}$$

Если одно из этих двух условий выполнено, то исследуемая система неустойчива и имеет два асимптотических решения, одно из которых стремится к положению равновесия при $t \to +\infty$, а другое — при $t \to -\infty$. Итак, при нечетном M неустойчивость является правилом. Если же M четно, и выполнено неравенство, противоположное (2.3.50), то, как показал А. Г. Сокольский [104], система устойчива по Ляпунову.

Для нахождения достаточных условий неустойчивости в последующих двух примерах уже не требуется переход к нормальной форме Биркгофа. Условия неустойчивости в этих задачах были найдены А. Г. Сокольским [102], где для их нахождения применялось преобразование, аналогичное преобразованию к обобщенной нормальной форме Биркгофа–Густавсона [157]. Мы получим условия неустойчивости, пользуясь лишь процедурой укорочения *исходного* гамильтониана, и покажем, что при этом существуют асимптотические решения.

Пример 2.3.7. Две нулевые частоты при наличии четырехмерной жордановой клетки. Напомним, что квадратичная часть функции Гамильтона этой задачи дается формулой (2.3.10). Представим неквадратичные члены функции Гамильтона H в виде суммы элементарных мономов:

$$H = H_2 + \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2 \geqslant 3} h_{i_1,i_2,j_1,j_2} u_1^{i_1} u_2^{i_2} v_1^{j_1} v_2^{j_2}.$$

Рассмотрим группу квазиоднородных растяжений, удовлетворяющую (2.3.30):

$$u_1 \mapsto \mu^6 u_1, \quad v_1 \mapsto \mu^5 v_1, \quad u_2 \mapsto \mu^4 u_2, \quad v_2 \mapsto \mu^7 v_2.$$

Эта группа выделяет из гамильтониана задачи квазиоднородное укорочение

$$H_{12} = \frac{\sigma}{2}(u_1^2 - 2v_1 v_2) + h_{0,3,0,0} u_2^3 \tag{2.3.51}$$

двенадцатой степени.

При

$$h_{0,3,0,0} \neq 0$$

система уравнений с гамильтонианом (2.3.51) имеет два асимптотических решения

$$\mathbf{x}^{\pm}(t) = \left(\frac{u_{1_0}^{\pm}}{(\pm t)^6}, \frac{v_{1_0}^{\pm}}{(\pm t)^5}, \frac{u_{2_0}^{\pm}}{(\pm t)^4}, \frac{v_{2_0}^{\pm}}{(\pm t)^7} \right),$$

где

$$u_{1_0}^{\pm} = \frac{5600}{h_{0,3,0,0}}\sigma, \quad v_{1_0}^{\pm} = \mp\frac{1120}{h_{0,3,0,0}}, \quad u_{2_0}^{\pm} = \frac{280}{h_{0,3,0,0}}\sigma, \quad v_{2_0}^{\pm} = \mp\frac{33600}{h_{0,3,0,0}}.$$

Таким образом, если $h_{0,3,0,0} \neq 0$, то исследуемая система неустойчива и имеет два асимптотических решения, одно из которых стремится к положению равновесия при $t \to +\infty$, а другое при $t \to -\infty$. Случай дополнительного вырождения ($h_{0,3,0,0} = 0$) требует специального изучения. Итак, для рассматриваемой задачи неустойчивость является типичной.

Пример 2.3.8. Две нулевые частоты при наличии двух двумерных жордановых клеток. В соответствии с формулой (2.3.9) квадратичная часть гамильтониана исследуемой задачи может быть приведена к виду

$$H_2 = \frac{\sigma_1}{2} v_1^2 + \frac{\sigma_2}{2} v_2^2. \tag{2.3.52}$$

Запишем неквадратичные члены в функции Гамильтона в виде суммы элементарных мономов и рассмотрим удовлетворяющую условиям (2.3.30) квазиоднородную шкалу:

$$u_j \mapsto \mu^2 u_j, \quad v_j \mapsto \mu^3 u_j, \quad j = 1, 2.$$

Эта шкала выделяет квазиоднородное укорочение шестой степени:

$$H_6 = \frac{\sigma_1}{2} v_1^2 + \frac{\sigma_2}{2} v_2^2 + h_{3,0,0,0} u_1^3 + h_{2,1,0,0} u_1^2 u_2 + h_{1,2,0,0} u_1 u_2^2 + h_{0,3,0,0} u_2^3. \tag{2.3.53}$$

Гамильтонова система с укороченной функцией Гамильтона (2.3.53) *почти всегда* имеет два асимптотических решения

$$\mathbf{x}^{\pm}(t) = \left(\frac{u_{1_0}^{\pm}}{(\pm t)^2}, \frac{v_{1_0}^{\pm}}{(\pm t)^3}, \frac{u_{2_0}^{\pm}}{(\pm t)^2}, \frac{v_{1_0}^{\pm}}{(\pm t)^3}, \right)$$

где

$$u_{1_0}^{\pm} = u_{1_0}, \quad u_{2_0}^{\pm} = u_{2_0}, \quad v_{1_0}^{\pm} = \pm\sigma_1 u_{1_0}, \quad v_{2_0}^{\pm} = \pm\sigma_2 u_{2_0},$$

а $\mathbf{c}_0 = (u_{1_0}, u_{2_0}) \in \mathbb{R}^2$ — ненулевой собственный вектор квадратичного векторного поля

$$\mathbf{f}_2 = \left(-\frac{\sigma_1}{6} (3h_{3,0,0,0} u_1^2 + 2h_{2,1,0,0} u_1 u_2 + h_{1,2,0,0} u_2^2), \right.$$
$$\left. -\frac{\sigma_2}{6} (h_{2,1,0,0} u_1^2 + 2h_{1,2,0,0} u_1 u_2 + 3h_{0,3,0,0} u_2^2) \right)$$

в стандартной метрике с собственным значением 1, т. е.

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{c}_0) = \mathbf{c}_0.$$

Такой собственный вектор существует, если, например, точка $u_1 = u_2 = 0$ является единственной (действительной!) критической точкой кубической функции

$$U_3(u_1, u_2) = 3h_{3,0,0,0} u_1^3 + h_{2,1,0,0} u_1^2 u_2 + h_{1,2,0,0} u_1 u_2^2 + h_{0,3,0,0} u_2^3.$$

В четырехмерном пространстве коэффициентов $U_3(u_1, u_2)$ множество, на котором это условие единственности нарушается, имеет меру нуль. Поэтому рассматриваемая система почти всегда неустойчива и имеет два асимптотических решения, одно из которых стремится к положению равновесия при $t \to +\infty$, а другое при $t \to -\infty$.

Глава 3
Сингулярные задачи

1. Асимптотические решения автономных систем дифференциальных уравнений в критическом случае нулевых корней характеристического уравнения

Название этого параграфа практически не отличается от названия §1 предыдущей главы. Однако, настоящий параграф мы посвятим проблеме влияния на устойчивость особой точки и существование асимптотических решений именно нулевых корней в случае, когда существуют корни характеристического уравнения системы первого приближения, *отличные от нуля*. Для того, чтобы понять, насколько резко отличается эта ситуация от изученной в главе 1, т. е. когда матрица линейной части системы нильпотентна, рассмотрим простой пример.

Пример 3.1.1. Рассмотрим простейшую систему дифференциальных уравнений на плоскости:

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -y^2. \tag{3.1.1}$$

Второе уравнение (3.1.1) имеет очевидное асимптотическое решение $y(t) = t^{-1}$. Подставим это решение в первое уравнение и найдем формальное решение получившегося линейного неоднородного уравнения в виде ряда:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k t^{-k}.$$

Нетрудно вычислить коэффициенты этого ряда: $x_k = (k-1)!$, т. е. данный ряд расходится для любых конечных значений t. Можно также получить явную формулу для решения этого уравнения с «начальным» условием $x(-\infty) = 0$:

$$x(t) = e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} s^{-1} e^{s}\, ds.$$

Оно является суммой по Борелю данного расходящегося ряда [127].

Очевидно, что $x(t), y(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, что означает неустойчивость.

Причину данного явления можно объяснить следующим образом. Полученное частное решение $x(t), y(t)$ лежит на центральном многообразии системы (3.1.1), которое не является аналитическим в окрестности $x = y = 0$. Действительно, в рассматриваемом случае центральное многообразие легко вычисляется. Оно задается функцией $x = \varphi(y)$, где

$$\varphi(y) = -e^{-y^{-1}} \int\limits_0^y e^{z^{-1}} z^{-1}\, dz = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! y^k$$

(приведенная формула верна, разумеется, только для отрицательных y).

Последний ряд является формальным рядом Тейлора функции $\varphi(y)$ и может быть получен при помощи последовательного интегрирования по частям.

Итак, в главе 1 было доказано, что асимптотические ряды (1.1.16) при отсутствии логарифмов сходятся. Аналогичные ряды строились во второй главе для систем уравнений типа (2.1.9). Эти ряды в большинстве случаев, скорее всего, расходятся, т. к. сама система (2.1.9), полученная при помощи расходящегося нормализующего преобразования, как правило, неаналитична. В рассмотренном примере мы столкнулись с принципиально иным явлением: существованием формального асимптотического решения в виде расходящегося ряда у аналитической системы. Как уже было сказано, это явление связано с неаналитичностью центрального многообразия. Дадим еще одно толкование рассмотренного явления. Задача поиска асимптотических решений «классических» полуквазиоднородных систем сводится к поиску частных решений $\mathbf{u}(s) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$ аналитических систем уравнений вида

$$-\beta s \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, s),$$

где $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) = O(\|\mathbf{u}\|^2)$ при $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$, а $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, s) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$ (ср. (1.1.18) и (1.3.12)).

Точка $s = 0$ является регулярной особой точкой линейной части этой системы. Известно [29], что асимптотические разложения решений линейных систем в окрестности регулярных особых точек сходятся. Поэтому можно ожидать, что будут сходиться и асимптотические разложения решений нелинейных систем. В системе (3.1.1) произведем замену зависимой и независимой переменных:

$$x = t^{-1}(1+u), \quad y = t^{-1}(1+v), \quad s = t^{-1},$$

после чего она примет вид:

$$-s^2\frac{du}{ds} = v - u + s(1+u), \quad -s\frac{dv}{ds} = -v - v^2.$$

Правые части этой системы также имеют вид $\mathbf{Ku} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, s)$, однако особая точка $s = 0$ будет сингулярной. Асимптотические разложения решений линейных систем в окрестности сингулярных особых точек, как правило, расходятся [29], поэтому в подобных случаях расходимость рядов, представляющих решения возмущенных нелинейных систем, кажется вполне естественной. В соответствии с приведенной классификацией особых точек мы будем называть *сингулярными* задачи поиска асимптотических решений, не сводимые к возмущениям фуксовых систем.

Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми правыми частями, для которых начало координат будет особой точкой. Мы будем предполагать также, что матрицы линеаризованных систем вырождены. Итак, рассмотрим систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Jy} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{3.1.2}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{J}$ — вещественные матрицы соответственно размером $d \times d$, $d \times n$ и $n \times n$, а вектор-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ являются соответственно гладкими отображениями пространства $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^n$, компоненты которых обращаются в начале координат $(0, 0)$ в нуль вместе со своими частными производными первого порядка.

Нашей задачей будет нахождение достаточных условий существования неэкспоненциальных асимптотических к особой точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ решений, в предположении, что матрица $\mathbf{A}$ невырождена, а матрица $\mathbf{J}$ нильпотентна. Если бы все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имели бы отрицательные вещественные части, мы имели бы дело с так называемым критическим случаем n нулевых корней [81]. Мы, однако, расширим задачу, предполагая лишь, что все собственные числа $\mathbf{A}$ ненулевые.

Без ограничения общности можно считать, что матрица $\mathbf{B}$ нулевая. Действительно, произведя линейную замену $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{Cy}$, где $\mathbf{C}$ — некоторая неизвестная матрица размером $d \times n$, получим, что линеаризованные уравнения примут вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + (\mathbf{B} + \mathbf{AC} - \mathbf{CJ})\mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Jy}.$$

Рассмотрим линейное матричное уравнение

$$\mathbf{AC} - \mathbf{CJ} = -\mathbf{B}. \tag{3.1.3}$$

Как система $d \times n$ неоднородных линейных уравнений с $d \times n$ неизвестными, (3.1.3) будет иметь единственное решение, если однородное уравнение

$$\mathbf{AC} - \mathbf{CJ} = \mathbf{0} \tag{3.1.4}$$

не имеет нетривиальных решений.

Поскольку $\det \mathbf{A} \neq 0$, а оператор $\mathbf{J}$ нильпотентен, матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ не имеют общих собственных значений, и (3.1.4) имеет лишь тривиальные решения [34].

Итак, мы будем иметь далее дело с системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Jy} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.1.5}$$

Поскольку нашей задачей является исследование влияния на существование асимптотических решений именно *нулевых* корней, то было бы естественно попытаться отделить от системы (3.1.5) некоторую «критическую» подсистему, матрица линейного приближения которой была бы нильпотентной. Возможность такого расщепления системы (3.1.5), по крайней мере на формальном уровне, гарантируется следующей теоремой.

Теорема 3.1.1. *Если в системе* (3.1.5) *матрица* $\mathbf{A}$ *невырождена, а* $\mathbf{J}$ *нильпотентна, то* (3.1.5) *имеет формальное инвариантное многообразие*

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y}), \tag{3.1.6}$$

где φ *— некоторая вектор-функция, разложение которой в формальные ряды Маклорена в окрестности* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *начинается по крайней мере с квадратичных членов.*

Доказательство. Рассмотрим невырожденную замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \varphi(\mathbf{y})$, после которой первая группа уравнений в (3.1.5) примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

где

$$\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{A}\varphi(\mathbf{y}) + \mathbf{f}\big(\mathbf{z} + \varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}\big) - d\varphi(\mathbf{y})\big(\mathbf{Jy} + \mathbf{g}(\mathbf{z} + \varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y})\big).$$

Попытаемся подобрать $\varphi(\mathbf{y})$ так, чтобы плоскость $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ была бы инвариантным многообразием, т. е. $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}$. Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для определения $\varphi(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{A}\varphi(\mathbf{y}) + \mathbf{f}\big(\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}\big) - d\varphi(\mathbf{y})\big(\mathbf{Jy} + \mathbf{g}(\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y})\big) = \mathbf{0}. \tag{3.1.7}$$

Будем искать $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ в виде формального ряда Маклорена

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{y}).$$

Соответствующие формы данного разложения могут быть найдены последовательно по индукции. Из (3.1.7) следует, что каждая однородная форма $\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{y})$ удовлетворяет линейной системе уравнений в частных производных

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{y}) + d\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y} = \boldsymbol{\vartheta}_m(\mathbf{y}),$$

где $\boldsymbol{\vartheta}_m$ — однородная вектор-функция степени m, зависящая от «предшествующих» форм $\boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{m-1}$.

Таким образом, если (3.1.8) разрешима для произвольной формы $\boldsymbol{\vartheta}_m$, то все формы $\boldsymbol{\varphi}_m$ могут быть вычислены по индукции. Пусть, далее, матрица $\mathbf{A}$ приведена к жорданову виду. Легко видеть, что разрешимость (3.1.8) достаточно доказать для случая, когда $\mathbf{A}$ является жордановой клеткой, на диагонали которой стоит число $\lambda \neq 0$. Перепишем (3.1.8) в координатном виде. Пусть $\boldsymbol{\varphi}_m = (\varphi_m^1, \ldots, \varphi_m^n)$, $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_m^1, \ldots, \vartheta_m^n)$. Тогда

$$\lambda\varphi_m^j(\mathbf{y}) + \varphi_m^{j+1}(\mathbf{y}) - \langle d\varphi_m^j(\mathbf{y}), \mathbf{J}\mathbf{y}\rangle = \vartheta_m^j(\mathbf{y}), \quad j = 1, \ldots, n-1$$
$$\lambda\varphi_m^n(\mathbf{y}) - \langle d\varphi_m^n(\mathbf{y}), \mathbf{J}\mathbf{y}\rangle = \vartheta_m^n(\mathbf{y}).$$

Очевидно, что достаточно доказать разрешимость последнего уравнения: остальные $n-1$ уравнений разрешаются по индукции аналогичным образом. Пространство $\mathfrak{J}_m$ скалярных однородных форм на $\mathbb{R}^n$, степень которых не превосходит m, конечномерно. Поэтому для разрешимости соответствующего уравнения достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} D_\lambda = \{0\}$, где $D_\lambda = \lambda + D$, $D = \langle d, \mathbf{J}\mathbf{y}\rangle$. Докажем, что оператор D нильпотентен. Тогда $-\lambda$ не может быть его собственным числом, и ядро оператора D_λ нулевое. Пусть матрица $\mathbf{J}$ приведена к жорданову виду. Нильпотентность оператора D достаточно показать для случая, когда $\mathbf{J}$ — жорданова клетка с нулевой диагональю. В этом случае

$$D = y^2\frac{\partial}{\partial y^1} + \ldots + y^n\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}.$$

Элементарные мономы $\left\{(y^1)^{i_1}\ldots(y^n)^{i_n}, i_1 + \ldots + i_n \leqslant m\right\}$ образуют базис в пространстве однородных форм степени, не превышающей m. Действие оператора D на базисе задается формулой

$$D\left((y^1)^{i_1}\ldots(y^n)^{i_n}\right) = \sum_{p=1}^{m-1} i_p(y^1)^{i_1}\ldots(y^p)^{i_p-1}(y^{p+1})^{i_{p+1}+1}\ldots(y^n)^{i_n}.$$

Подпространство, натянутое на мономы $(y^n)^{i_n}$, образует ядро оператора D. Рассмотрим подпространство, натянутое на базисные мономы вида $(y^{n-1})^{i_{n-1}}(y^n)^{i_n}$. Очевидно, что $(i_{n-1}+1)$-кратное применение оператора D к этим базисным мономам приведет к их обнулению. Далее будем действовать по индукции. Рассмотрим теперь инвариантное подпространство, натянутое на базисные мономы, содержащие только последние $n-p+$ $+1$ переменных. Эти мономы представимы в виде $(y^p)^{i_p}\varphi^{(p)}(y^{p+1},\ldots,y^n)$. Пусть все $\varphi^{(p)} \in \operatorname{Ker} D^{S_p}$ для некоторого достаточно большого $S_p \in \mathbb{N}$. После S_p-кратного применения оператора D получим полином, степень которого по y^p уменьшится на единицу. Следовательно, $(i_p+1)S_p$-кратное применение оператора D приведет к его обнулению. Поэтому рассматриваемое подпространство лежит в ядре некоторой S_{p+1}-й степени D. При помощи данной процедуры может быть исчерпано все пространство $\mathfrak{J}_m$, что доказывает нильпотентность D.

Следовательно, на каждом m-м шаге индукции система уравнений в частных производных (3.1.8) разрешима.

Теорема доказана.

Если ни одно из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ не лежит на мнимой оси, то этот результат является следствием теоремы о центральном многообразии [85]. Этот же результат можно было бы получить из теоремы Пуанкаре–Дюлака о нормальной форме [4], воспользовавшись тем, что невырожденность матрицы $\mathbf{A}$ означает по сути дела отсутствие резонансов определенного вида. Такой подход был использован, например, в работе [20, 148] для построения формального инвариантного многообразия типа (3.1.6) некоторой гамильтоновой системы специального вида. Однако приведение к нормальной форме предусматривает преобразование всех фазовых переменных, что делает соответствующий алгоритм построения инвариантного многообразия гораздо более сложным. Рассмотренная здесь методика позволяет получить также *явное* уравнение для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$, задающей искомое многообразие.

Формальные уравнения движения системы на построенном инвариантном многообразии будут иметь вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}). \tag{3.1.8}$$

Все собственные значения матрицы линейного приближения системы (3.1.8) нулевые, поэтому формально к ней применим метод построения асимптотических решений, разработанный в главе 1. Имеет место следующий результат, обобщающий теорему из [117].

Теорема 3.1.2. *Пусть редуцированная на формальное инвариантное многообразие* (3.1.6) *система* (3.1.8) *полуквазиоднородна относительно структуры, порожденной некоторой диагональной матрицей* $\mathbf{G}$ *с положительными элементами. Пусть, далее, квазиоднородное укорочение*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}) \tag{3.1.9}$$

системы (3.1.8) *таково, что существуют вектор* $\mathbf{y}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0^\gamma \neq 0$ *и число* $\gamma = \pm 1$, *удовлетворяющие алгебраической системе уравнений*

$$-\gamma \mathbf{G} \mathbf{y}_0^\gamma = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\mathbf{y}_0^\gamma). \tag{3.1.10}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3.1.2) *имеет асимптотическое решение* $\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\big) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Из теоремы 3.1.2 в качестве следствия вытекает теорема о неустойчивости особой точки системы (3.1.2).

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы и в системе уравнений* (3.1.10) $\gamma = -1$. *Тогда особая точка* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (3.1.2) *неустойчива.*

Доказательство теоремы 3.1.2. Из теоремы 1.1.2 следует, что система (3.1.8) имеет частное формальное асимптотическое решение вида

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-b_k}, \tag{3.1.11}$$

где $b_k = g_k + \beta k > 0$ — возрастающая последовательность действительных чисел, g_k — элементы матрицы $\mathbf{G}$, а $\mathbf{y}_k$, как обычно, — некоторые полиномиальные вектор-функции.

Подставив это решение в уравнение формального инвариантного многообразия (3.1.6), получим формальный ряд для $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}\big(\mathbf{y}(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-a_k}. \tag{3.1.12}$$

Здесь $a_k > 0$ — также некоторая возрастающая последовательность действительных чисел, $\mathbf{x}_k$ — некоторые полиномиальные вектор-функции.

Если бы удалось доказать сходимость рядов (3.1.11) и (3.1.12), то теорема была бы доказана, поскольку каждый член этих рядов стремится к нулю при $t \to \gamma \times \infty$. Однако, как показал пример (3.1.1), эти ряды могут расходиться (и, как правило, расходятся!). В этой ситуации неприменима также техника, основанная на аппарате теоремы о неявной функции, использовавшаяся в первой главе для доказательства существования *гладких* решений. Однако, теория Кузнецова [75, 76], которая более подробно будет рассмотрена в § 3 этой главы, утверждает, что существование формальных решений вида (3.1.11), (3.1.12) влечет за собой существование бесконечно дифференцируемых решений с соответствующей асимптотикой. На этом этапе мы пока ограничимся констатацией факта существования формальных решений.

Теорема доказана.

В [117] в формулировке теоремы, аналогичной теореме 3.1.2, присутствовало дополнительное условие отсутствия резонансов определенного вида между собственными числами матрицы $\mathbf{A}$ вплоть до некоторого достаточно высокого порядка. Это дополнительное условие возникало из-за того, что асимптотическое решение искалось не на инвариантном многообразии, а во всем фазовом пространстве. Эта процедура потребовала наложения условия отделимости критической подсистемы (в конечном порядке) в нормальной форме, и, как следствие, дополнительного условия нерезонансности.

Идея построения инвариантных многообразий для исследования устойчивости в критическом случае нулевых корней восходит еще к Ляпунову [81]. Именно таким способом им был исследован критический случай нулевого корня. Здесь мы, однако, не налагаем требования, чтобы все остальные собственные значения матрицы первого приближения имели отрицательные вещественные части. Рассмотрим, например, ситуацию, уже обсуждавшуюся во второй главе, когда часть корней характеристического уравнения системы первого приближения — нулевые, а оставшиеся — чисто мнимые. Общий алгоритм исследования устойчивости в «чисто мнимой» ситуации предусматривает приведение к нормальной форме Пуанкаре и «квазиоднородное» исследование системы размерности $d + n$. Очевидно, что с вычислительной точки зрения алгоритм построения формального инвариантного многообразия и последующего исследования n-мерной системы существенно экономичнее. При этом необходимо лишь помнить, что неустойчивость в системе может быть вызвана взаимодействием мод, отвечающих нулевым корням с модами, отвечающими чисто мнимым корням. В этом случае, разумеется, процедура редукции системы на формальное инвариантное многообразие (3.1.6) не даст достаточных условий неустойчивости.

Пример 3.1.2. Покажем, как получить простой критерий неустойчивости положения равновесия устойчивой в первом приближении многомерной гамильтоновы системы в случае одной нулевой частоты. Эта ситуация была изучена А. Г. Сокольским [105] при отсутствии резонансов между остальными частотами. Последнее требование вытекает из метода Сокольского, предусматривающего приведение системы к нормальной форме Биркгофа. Для того, чтобы в многомерном случае при наличии какого-либо резонанса нормальная форма имела некоторый конкретный, пригодный для исследования вид, необходимо накладывать условие отсутствия других резонансов. Техника редукции на формальное инвариантное многообразие позволяет избежать дополнительных сложностей, связанных с приведением к нормальной форме.

Итак, рассмотрим гамильтонову систему с n степенями свободы с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_j\omega_j(u_j^2+v_j^2)+ \\ + H_M(u_1,\ldots,u_{n-1},u_n,v_1,\ldots,v_{n-1},v_n)+\ldots, \quad (3.1.13)$$

где $\sigma_j=\pm1$, $\omega_j>0$, $j=1,\ldots,n-1$, H_M — первая нетривиальная форма разложения функции Гамильтона в ряд Маклорена, следующая за квадратичной ($M\geqslant 3$), а многоточие означает совокупность нелинейных членов более высокого порядка, чем M.

Рассмотрим функцию двух переменных

$$h_M(u_n,v_n)=H_M(0,\ldots,0,u_n,0,\ldots,0,v_n).$$

Имеет место

Теорема 3.1.4. *Если функция $h_M(u_n,v_n)$ знакопеременна, и множество ее нулей не совпадает с множеством нулей ее градиента, то положение равновесия $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$ системы с функцией Гамильтона* (3.1.13) *неустойчиво.*

Доказательство. Уравнения движения системы с гамильтонианом (3.1.13) имеют вид

$$\dot u_j=-\sigma_j\omega_jv_j-\frac{\partial}{\partial v_j}H_M+\ldots,\quad \dot v_j=\sigma_j\omega_ju_j+\frac{\partial}{\partial u_j}H_M+\ldots, \\ j=1,\ldots,n-1 \quad (3.1.14) \\ \dot u_n=-\frac{\partial}{\partial v_n}H_M+\ldots,\qquad \dot v_n=\frac{\partial}{\partial u_n}H_M+\ldots$$

Система уравнений (3.1.14) имеет вид (3.1.5), поэтому к этой системе применима теорема 3.1.1. Уравнение формального инвариантного многообразия (3.1.6) в рассматриваемом конкретном случае будет иметь вид

$$u_j = \varphi_j(u_n, v_n), \quad v_j = \psi_j(u_n, v_n), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

где функции φ_j, ψ_j обращаются в нуль вместе со своими частными производными по крайней мере первою порядка в точке $u_n = v_n = 0$.

Редуцированная на формальное инвариантное многообразие система примет тогда вид

$$\dot{u}_n = -\frac{\partial}{\partial v_n} h_M + \ldots, \quad \dot{v}_n = -\frac{\partial}{\partial u_n} h_M + \ldots,$$

где многоточия означают совокупность членов порядка, большего, чем $M-1$.

В этой системе естественным образом выделяется *однородное* укорочение: сохраняя лишь члены порядка $M-1$, получим гамильтонову систему с одной степенью свободы и гамильтонианом h_M. Эта система фактически была уже изучена нами в § 3 главы 2. Если выполнены условия теоремы, то эта система имеет как «входящее», так и «выходящее» частное решение в виде прямолинейного луча. Поэтому в силу теоремы 3.1.2 полная система (3.1.14) имеет частные решения, стремящиеся к положению равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to +\infty$, что означает неустойчивость.

Теорема доказана.

Следующая проблема, которую мы рассмотрим, занимает промежуточное место между регулярными и сингулярными задачами. Пусть теперь все собственные значения матрицы$\mathbf{A}$ имеют отрицательные вещественные части. Изучим асимптотику решений системы (3.1.2), стремящихся к особой точке при $t \to +\infty$. Система (3.1.2) имеет d-параметрическое семейство частных решений, имеющих экспоненциальную асимптотику. Эти решения могут быть разложены в ряды Ляпунова: в них будут входить экспоненты от времени t в действительных отрицательных степенях, а коэффициенты будут зависеть полиномиально от t, а также от тригонометрических функций некоторого набора величин $\omega_p t$, $p \leqslant d$. С другой стороны, при выполнении условий теоремы 3.1.2 система (3.1.2) будет иметь решения, разложимые в ряды вида (3.1.12), содержащие t в действительных отрицательных степенях, коэффициенты которых полиномиально зависят от $\ln t$. Оба типа решений лежат на инвариантных многообразиях системы (на устойчивом и центральном соответственно). Возникает естественный вопрос: «Как взаимодействуют между собой эти два типа движения?» Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях существуют частные решения системы, не лежащие ни на устойчивом, ни на центральном инвариантных многообразиях, разложения которых содержат e^t и t в отрицательных степенях. Элементарный пример такого разложения рассматривался в § 1 главы 1 (пример 1.5.5).

Вот менее тривиальный пример.

Пример 3.1.3. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -x(x+1)(y+1), \quad \dot{y} = -y^2 \tag{3.1.15}$$

имеет два очевидных инвариантных многообразия: устойчивое ($y = 0$) и центральное ($x = 0$).

Семейство асимптотических решений, лежащее на устойчивом многообразии системы (3.1.15), раскладывается в экспоненциальные ряды

$$x(t) = \frac{ce^{-t}}{1 - ce^{-t}} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k e^{-kt}, \quad y(t) = 0.$$

Существует также единственное асимптотическое решение, лежащее на центральном многообразии:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t^{-1}.$$

Нетрудно, однако, заметить, что система (3.1.15) имеет однопараметрическое семейство решений, которые не принадлежат данным многообразиям и раскладываются в ряды, являющимися своеобразным гибридом рядов Ляпунова и Лорана:

$$x(t) = \frac{ce^{-t}t^{-1}}{1 - ce^{-t}t^{-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k e^{-kt} t^{-k}, \quad y(t) = t^{-1}.$$

Вернемся к анализу системы (3.1.5) и предположим, что выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, \ldots, d$, λ_j — корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$,

2) матрица $\mathbf{A}$ диагонализируема,

3) разложение правой части второй группы уравнений системы (3.1.7) начинается с членов по крайней мере второго порядка: $d_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Рассмотрим систему (3.1.5) и предположим, что она приведена к нормальной форме Пуанкаре [4, 154]. Для нормализованных переменных сохраним старые обозначения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Поскольку все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательные вещественные части, то отсутствуют резонансы вида:

$$\sum_{j=1}^{d} p_j \lambda_j = 0, \quad p_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j = 1, \ldots, d, \quad \sum_{j=1}^{d} p_j \geqslant 2.$$

Тогда вектор-функция $\mathbf{g}$ не зависит от $\mathbf{x}$. Что же касается вектор-функции $\mathbf{f}$, то по определению нормальной формы имеет место тождество

$$\mathbf{f}\big(\exp(\mathbf{A}\sigma)\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) = \exp(\mathbf{A}, \sigma)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{3.1.16}$$

для любых $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{d+n}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и, кроме того,

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}.$$

Итак, мы будем иметь дело с системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \tag{3.1.17}$$

такой, что вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ подчиняется (3.1.16).

Для системы (3.1.17) d-мерная плоскость $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ является устойчивым многообразием, а n-мерная плоскость $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — центральным. Наложим еще одно дополнительное условие

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}, \tag{3.1.18}$$

т. е. правые части первой подсистемы в (3.1.17) содержат компоненты вектора $\mathbf{y}$ лишь в степенях, больших или равных двум.

Рассмотрим разложения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=1} \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \sum_{m=1} \mathbf{g}_{m+1}(\mathbf{y}),$$

где $\mathbf{f}_{m+1}, \mathbf{g}_{m+1}$ однородные вектор-формы $\mathbf{y}$ степени $m+1$, причем коэффициенты форм $\mathbf{f}_{m+1}$ являются формальными рядами по $\mathbf{x}$.

Далее мы будем предполагать, что

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{y}) \not\equiv 0.$$

В $(d+n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве системы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = t\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} = -\mathbf{y}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = t. \tag{3.1.19}$$

Система (3.1.19) порождает поток

$$\mathbf{x} = \exp\bigl(\mathbf{A}\tau(e^{\sigma}-1)\bigr)\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{y} = e^{-\sigma}\boldsymbol{\eta}, \quad t = e^{\sigma}\tau. \tag{3.1.20}$$

Пользуясь (3.1.20), от переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, τ перейдем к новым переменным $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, τ. Из (3.1.16) следует, что рассматриваемая система (3.1.17) примет тогда вид

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \sum_{m=1} e^{-m\sigma}\mathbf{f}_{m+1}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta}' = \sum_{m=0} e^{-m\sigma}\mathbf{g}_{m+2}(\boldsymbol{\eta}),$$
$$(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}. \tag{3.1.21}$$

Из (3.1.21) видно, что поток (3.1.20), порождаемый системой уравнений (3.1.19), является экспоненциально-асимптотической расширенной группой симметрии системы (3.1.17). Укороченная система имеет при этом вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}). \tag{3.1.22}$$

В достаточно общей ситуации система (3.1.22) имеет однопараметрическое семейство частных решений, лежащих на орбите группы (3.1.20) вида

$$\mathbf{x} = \exp\bigl(\mathbf{A}(t-\tau_0)\bigr)\mathbf{c}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0(t/\tau_0)^{-1}, \quad \tau_0 > 0.$$

Здесь $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ — вектор параметров семейства, а $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ должно удовлетворять системе равенств

$$\tau_0\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0) = -\mathbf{y}_0. \tag{3.1.23}$$

Итак, мы можем воспользоваться теоремой 1.5.2. Приведем систему к новому «времени» σ:

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \tau_0\sum_{m=1} e^{-m\sigma}\mathbf{f}_{m+1}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \boldsymbol{\eta} + \tau_0\sum_{m=0} e^{-m\sigma}\mathbf{g}_{m+2}(\boldsymbol{\eta}). \tag{3.1.24}$$

Параметр τ_0 без ограничения общности можно положить равным плюс единице.

Система (3.1.24) имеет семейство формальных частных решений

$$\boldsymbol{\xi}(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\xi}_k(\sigma)e^{-k\sigma},\quad \boldsymbol{\eta}(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\eta}_k(\sigma)e^{-k\sigma},$$

где $\boldsymbol{\eta}_0=\mathbf{y}_0$, а вектор $\boldsymbol{\xi}_0$ может быть выбран произвольно.

Здесь $\boldsymbol{\xi}_k(\sigma)$, $\boldsymbol{\eta}_k(\sigma)$ — полиномиальные вектор-функции σ. Возвращаясь к исходным переменным, получим, что система (3.1.17) имеет семейство формальных частных решений вида

$$\mathbf{x}(t)=\exp(\mathbf{A}t)\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{x}_k(\ln t)t^{-k},\quad \mathbf{y}(t)=t^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{y}_k(\ln t)t^{-k},\tag{3.1.25}$$

где коэффициенты $\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k$ от $\ln t$ зависят полиномиально.

Если от нормальных координат вернуться к исходным переменным (сохраним за ними обозначения $(\mathbf{x},\mathbf{y})$), то решение системы (3.1.2) уже не будет иметь столь простого вида (3.1.25), поскольку экспоненты будут «перемешаны». Рассмотрим простой случай, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ действительны. Тогда в исходных переменных система (3.1.2) будет иметь формальное решение

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{y}(t)\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_k(t)\\ \mathbf{y}_k(t)\end{pmatrix}e^{-a_k t},\tag{3.1.26}$$

где коэффициенты $\mathbf{x}_k(t),\mathbf{y}_k(t)$ могут быть представлены рядами

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_k(t)\\ \mathbf{y}_k(t)\end{pmatrix}=\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{kj}(t)\\ \mathbf{y}_{kj}(t)\end{pmatrix}t^{-j},$$

а последовательность показателей $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $a_0\geqslant 0$ монотонно стремится к $+\infty$.

В последних рядах коэффициенты $\mathbf{x}_{kj},\mathbf{y}_{kj}$ полиномиально зависят от логарифмов времени t.

Итак, имеет место

Теорема 3.1.5. *Пусть в системе* (3.1.2) *матрица* $\mathbf{A}$ *диагонализируема, все ее собственные числа вещественны и отрицательны, а матрица* $\mathbf{J}$ *— нулевая. Пусть нормальная форма* (3.1.17) *системы* (3.1.5) *такова, что имеет место* (3.1.18)*, и квадратичная часть разложения векторного поля* $\mathbf{g}$ *в ряд Маклорена имеет ненулевой собственный вектор* (*см.* (3.1.23)). *Тогда существует* d-*параметрическое семейство гладких асимптотических при* $t \to +\infty$ *решений системы* (3.1.2)*, представимых в виде рядов* (3.1.26)*.*

На этом этапе мы доказали лишь существование формальных решений. Построенные ряды могут расходиться, хотя бы по той причине, что нормализующее преобразование, использовавшееся при их построении является, как правило, расходящимся. С другой стороны, как показывает пример 3.1.3, в ряде случаев эти ряды могут сходиться при достаточно больших t. Доказательство факта соответствия этих формальных решений фактическим гладким решениям мы оставим до § 3.

2. О повторных логарифмах

Для того, чтобы лучше понять, о чем пойдет речь, рассмотрим сперва несколько простых, но поучительных примеров.

ПРИМЕР 3.2.1. Систему дифференциальных уравнений на плоскости

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = -xy^2 \tag{3.2.1}$$

можно трактовать двояко. Во-первых, она полуоднородна (т. е. полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой матрицей $\mathbf{G} = \mathbf{E}$). Ее укорочение имеет весьма простой вид

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = 0.$$

Асимптотическое при $t \to +\infty$ частное решение системы (3.2.1), представимое в виде рядов (1.1.16), с точностью до сдвига по времени имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = 0. \tag{3.2.2}$$

С другой стороны, эта система является квазиоднородной относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0)$. Данная структура позволяет найти решение (3.2.2), не прибегая к разложению в ряды (1.1.16), поскольку это решение лежит на орбите соответствующей группы растяжений.

Помимо решения (3.2.2), система (3.2.1) имеет еще одно асимптотическое решение

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{1}{\ln t}, \tag{3.2.3}$$

природа которого пока не ясна.

Сделаем замену переменных, возмущающую решение (3.2.2)

$$x = t^{-1}(1+u), \quad y = v, \quad \tau = \ln t.$$

В силу своей полуквазиоднородности, после данной замены (3.2.1) превратится в автономную систему

$$u' = -u - u^2, \quad v' = -v^2 - v^2 u, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}(\cdot). \tag{3.2.4}$$

Матрица линейного приближения этой системы (являющаяся матрицей Ковалевской для решения (3.2.2)) имеет собственные числа $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 0$. В этой ситуации к системе (3.2.4) применима теорема о центральном многообразии, которое в рассматриваемом случае имеет весьма простой вид:

$$u = 0.$$

Редуцированная на инвариантное центральное многообразие система (3.2.4) запишется в виде

$$v' = -v^2.$$

Последняя система имеет очевидное асимптотическое решение $v(\tau) = \tau^{-1}$, соответствующее второй компоненте (3.2.3).

Основываясь на системе (3.2.1), нетрудно привести пример системы, асимптотическое решение которой содержит обратные степени повторного логарифма времени любого порядка. Например, квазиоднородная относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0, 0)$, система

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = -xy^2, \quad \dot{z} = -xyz^2$$

имеет частное асимптотическое при $t \to +\infty$ решение

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{1}{\ln t}, \quad z(t) = \frac{1}{\ln(\ln t)}.$$

Пример 3.2.2. «Испортим» систему (3.2.1), сделав ее *полуквазиоднородной* относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0)$:

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = -xy^2 - x^2y^2. \tag{3.2.5}$$

Эта система является также полуоднородной и допускает решение

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = 0.$$

Система (3.2.5) имеет также менее очевидное асимптотическое решение

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{1}{\ln t - t^{-1}} = \frac{1}{\ln t}\sum_{k=0}^{\infty}(t\ln t)^{-k}. \tag{3.2.6}$$

Если в системе (3.2.5) сделать замену $x = t^{-1}(1+u)$, $y = v$, $\tau = \ln t$, то эта система перепишется в виде

$$u' = -u - u^2, \quad v' = -v^2(1+u)(1+e^{-\tau}(1+u)). \tag{3.2.7}$$

Хотя в силу неавтономности системы (3.2.7) теорема о центральном многообразии к ней неприменима, прямая $u = 0$ по-прежнему инвариантна. Редуцированная на эту прямую система имеет вид

$$v' = -(1+e^{-\tau})v^2.$$

Последняя система является системой с разделяющимися переменными и поэтому легко может быть проинтегрирована. Однако заметим, что замена зависимой переменной

$$v = \frac{w}{1 - e^{-\tau}w}$$

приводит данную систему к *автономному* виду

$$w' = -w^2.$$

Эта система имеет частное асимптотическое решение, отвечающее y-компоненте решения (3.2.6). Построенное (зависящее от логарифмического времени τ) преобразование является в каком-то смысле нормализующим преобразованием, «убивающим» зависимость от времени правых частей системы (3.2.7) на инвариантном многообразии $u = 0$.

Из рассмотренных примеров можно сделать ряд выводов. Во-первых, что обратные степени логарифмов (как обычных, так и повторных) в разложении асимптотических решений появляются тогда, когда среди собственных чисел матрицы Ковалевской появляются нули (эта ситуация может встретиться, например, если особая точка укороченной системы неизолирована). Во-вторых, ядро линейного оператора, соответствующего матрице Ковалевской, касается некоторого инвариантного многообразия системы «уравнений возмущенного движения», на котором лежит искомое асимптотическое решение. Наконец, редуцированная на это многообразие система, по-видимому, может быть приведена к автономному виду.

Следующий пример показывает, что причиной более слабого, чем степенное, стремления некоторых компонент асимптотического решения к вырожденной особой точке могут быть не только нулевые, но и чисто мнимые собственные числа матрицы Ковалевской.

Пример 3.2.3. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = -x\big(z + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)y\big), \quad \dot{z} = -x\big(-y + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)z\big),$$

квазиоднородную относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 0, 0)$.

Эта система имеет следующее частное решение:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{\cos \ln t}{\sqrt{\ln t}}, \quad z(t) = \frac{\sin \ln t}{\sqrt{\ln t}}.$$

Легко вычислить собственные числа матрицы Ковалевской, отвечающей решению $x(t) = t^{-1}$, $y(t) = z(t) = 0$, лежащему на орбите соответствующей группы квазиоднородных растяжений: $\rho_1 = -1$, $\rho_{2,3} = \pm i$.

Здесь мы рассмотрим детально лишь вопрос о влиянии нулевых собственных чисел матрицы Ковалевской на поведение асимптотических решений в окрестности сильно вырожденной особой точки.

Итак, рассмотрим гладкую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{3.2.8}$$

для которой начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является вырожденной особой точкой (матрица Якоби $d\mathbf{f}(\mathbf{0})$ имеет только нулевые собственные значения), положительно полуквазиоднородной относительно структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}$, собственные числа которой имеют неотрицательные вещественные части.

Пусть укороченная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x})$$

имеет частное асимптотическое решение

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \mathbf{x}_0^\gamma.$$

Очевидно, что после замены

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma + \mathbf{u}(\gamma t)), \quad \tau = \ln(\gamma t),$$

система (3.2.8) перепишется в следующем виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{K}\mathbf{u} + \phi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u}, \tau), \tag{3.2.9}$$

где $\phi(\mathbf{u}) = O(\|\mathbf{u}\|^2)$ при $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{u})$ представляется в виде степенного ряда относительно $e^{-\beta\tau}$ без свободного члена, а штрих означает производную по логарифмическому времени τ.

Система (3.2.9) является асимптотически автономной: зависимость от логарифмического времени исчезает при $\tau \to +\infty$.

Мы покажем, что существует *формальное*, асимптотически тождественное преобразование $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{z}$, приводящее систему (3.2.9) к автономному виду. Более точно, имеет место

Теорема 3.2.1. *При помощи формального преобразования вида*

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{z} + \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{U}_m(\mathbf{z}, \tau) \tag{3.2.10}$$

где вектор-функция $\widehat{\mathbf{u}}(\tau)$ является некоторым формальным рядом

$$\widehat{\mathbf{u}}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k(\tau) e^{-k\beta\tau} \tag{3.2.11}$$

($\mathbf{u}_k(\tau)$ *— вектор-полиномы от* τ), *матрица* $\mathbf{B}(\tau)$ *представима в виде ряда*

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k(\tau) e^{-k\beta\tau}, \tag{3.2.12}$$

($\mathbf{B}_k(\tau)$ *— матричные полиномы от* τ), *а* $\mathbf{U}_m(\mathbf{z}, \tau)$ *— однородные формы* $\mathbf{z}$ *степеней* $m = 2, 3, \ldots$, *коэффициенты которых являются формальными степенными рядами относительно* $e^{-\beta\tau}$ *без свободных членов, коэффициенты которых в свою очередь полиномиально зависят от логарифмического времени* τ, *система уравнений* (3.2.9) *может быть приведена к автономному виду*

$$\mathbf{z}' = \mathbf{K}\mathbf{z} + \phi(\mathbf{z}). \tag{3.2.13}$$

Доказательство. Выполним преобразование (3.2.10) в несколько этапов.

1-й шаг. Перенос особой точки в начало координат.

Имеет место

Лемма 3.2.1. *При помощи сдвига* $\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{v}$*, где* $\widehat{\mathbf{u}}(\tau)$ *— формальный ряд вида* (3.2.11)*, система* (3.2.9) *может быть переписана в виде*

$$\mathbf{v}' = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau), \tag{3.2.14}$$

где матрица $\mathbf{K}(\tau)$ *имеет формальное разложение*

$$\mathbf{K}(\tau) = \mathbf{K} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{K}_k(\tau) e^{-k\beta\tau}$$

с коэффициентами, полиномиально зависящими от τ*, а* $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau) = O(\|\mathbf{v}\|^2)$ *— формальный степенной ряд относительно* $\mathbf{v}$*,* $e^{-\beta\tau}$ *с полиномиально зависящими от* τ *коэффициентами.*

Доказательство. Вспомним, что мы находимся в условиях теоремы 1.1.2, в силу чего система (3.2.8) имеет формальное частное решение в виде рядов (1.1.16), которые после замены $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}$, $t \mapsto \tau$ переходят в ряды (3.2.11). Следовательно, (3.2.12) будут формальным частным решением системы (3.2.9), если $\mathbf{u}_k(\tau) = \mathbf{x}_k(\ln(\gamma t))$. Поэтому сдвиг $\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{v}$ переводит систему (3.2.9) в (3.2.14), которая при этом остается асимптотически автономной, и более того, формально, т. е. почленно $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}, \tau) \to \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v})$ при $\tau \to +\infty$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь систему линейного приближения для (3.2.14)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{v}. \tag{3.2.15}$$

2-й шаг. «Автономизация» линейной системы (3.2.15).

Лемма 3.2.2. *При помощи формального линейного преобразования* $\mathbf{v} = \mathbf{B}(\tau)\mathbf{w}$*, где матрица* $\mathbf{B}(\tau)$ *имеет асимптотическое разложение* (3.2.12)*, система* (3.2.15) *может быть переведена в автономную систему*

$$\mathbf{w}' = \mathbf{K}\mathbf{w}.$$

Доказательство. Матрица $\mathbf{B}(\tau)$ должна удовлетворять следующему матричному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{B}'(\tau) = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{B}(\tau) - \mathbf{B}(\tau)\mathbf{K}.$$

В этом последнем уравнении приравняем матричные коэффициенты при $e^{-k\beta\tau}$, $k = 0, 1, \ldots$. При $k = 0$ получаем очевидное тождество, а для высших степеней $e^{-k\beta\tau}$ имеют место матричные уравнения

$$\mathbf{B}_k'(\tau) = \mathbf{K}\mathbf{B}_k(\tau) - \mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{K} + \mathbf{D}_k(\tau), \quad \mathbf{D}_k(\tau) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{K}_j(\tau)\mathbf{B}_{k-j}(\tau).$$

Пусть $\mathbf{B}_1(\tau), \ldots, \mathbf{B}_{k-1}(\tau)$ найдены, тогда $\mathbf{D}_k$ является известным матричным полиномом от τ. Поэтому выписанное уравнение на $\mathbf{B}_k$ можно трактовать как неоднородную систему n^2 линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной неоднородностью. Как известно, такая система всегда имеет полииномиальное частное решение. Таким образом, все коэффициенты матрицы (3.2.12) могут быть найдены по индукции.

Лемма доказана.

После применения построенного линейного преобразования к *нелинейной* системе (3.2.14) последняя примет вид

$$\mathbf{w}' = \mathbf{K}\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}, \tau). \tag{3.2.16}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}, \tau) = O(\|\mathbf{w}\|^2)$ — снова является формальным степенным рядом относительно $\mathbf{w}$, $e^{-\beta\tau}$ с полиномиально зависящими от τ коэффициентами, формально стремящимся к $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{w})$ при $\tau \to +\infty$.

3-й шаг. Устранение неавтономности в нелинейных слагаемых правой части системы (3.2.15).

Лемма 3.2.3. *При помощи формального преобразования*

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} + \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{W}_m(\mathbf{z}, \tau), \tag{3.2.17}$$

где $\mathbf{W}_m(\mathbf{z}, \tau)$ — однородные вектор-полиномы по $\mathbf{z}$ степеней $m = 2, 3, \ldots$, коэффициенты которых являются формальными степенными рядами относительно $e^{-\beta\tau}$ без свободных членов с коэффициентами, полиномиально зависящими от τ, система уравнений (3.2.16) *может быть приведена к автономному виду* (3.2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что поскольку при $\tau \to +\infty$ вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}, \tau)$ стремится к $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{w})$, преобразование (3.2.17) должно быть асимптотически тождественным, т. е. $\mathbf{W}_m(\mathbf{z}, \tau) \to 0$, $m = 2, 3, \ldots$ при $\tau \to +\infty$.

Построение преобразования (3.2.17) будем вести по индукции. Пусть однородные формы $\mathbf{W}_2(\mathbf{z},\tau),\dots,\mathbf{W}_{m-1}(\mathbf{z},\tau)$ найдены. Рассмотрим так называемое гомологическое уравнение, которому должна удовлетворять форма $\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau) = [\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau),\mathbf{Kz}] + \mathbf{F}_m(\mathbf{z},\tau), \tag{3.2.18}$$

где однородная форма $\mathbf{F}_m(\mathbf{z},\tau)$ степени m зависит (причем полиномиально) лишь от форм с низшими номерами, $[\cdot\,,\,\cdot]$ — коммутатор векторных полей.

Форма $\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau)$ входит в систему уравнений в частных производных (3.2.18) линейно, поэтому раскладывая $\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau)$ и $\mathbf{F}_m(\mathbf{z},\tau)$ в степенные ряды по $e^{-\beta\tau}$

$$\mathbf{W}_m(\mathbf{z},\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau)e^{-\beta\tau}, \quad \mathbf{F}_m(\mathbf{z},\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{F}_{m,k}(\mathbf{z},\tau)e^{-\beta\tau}$$

($\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau)$ и $\mathbf{F}_{m,k}(\mathbf{z},\tau)$ — однородные формы переменной $\mathbf{z}$ степени m, коэффициенты которых полиномиальны по τ) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях данной экспоненты, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau) = k\beta\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau) + [\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau),\mathbf{Kz}] + \mathbf{F}_{m,k}(\mathbf{z},\tau).$$

Пространство вектор-форм размерности n степени m конечномерно, поэтому последняя система уравнений в частных производных на $\mathbf{W}_{m,k}(\mathbf{z},\tau)$ может трактоваться как система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и полиномиальной неоднородностью, которая всегда имеет полиномиальное частное решение.

Лемма доказана.

Последовательное применение описанных трех шагов дает нам преобразование (3.2.10).

Теорема 3.2.1 доказана.

Идея «автономизации» системы (3.2.9) при помощи преобразования (3.2.10), коэффициенты которого зависят не только от степеней $e^{\beta\tau}$, но и от степеней τ, берет начало в теории возмущений. Наличие степеней τ в разложении (3.2.10) аналогично появлению так называемых секулярных членов в стандартной схеме теории возмущений (см., например, [16]). Однако в рассматриваемом случае их негативное влияние может компенсироваться наличием экспонент с отрицательными показателями, поэтому ряды (3.2.10), *возможно*, являются сходящимися, разумеется, в случае, когда правая часть системы (3.2.8) аналитична и сходятся ряды (1.1.16), изображающие асимптотическое решение системы (3.2.8). Последнее высказывание, конечно, не является строгим утверждением и нуждается в проверке.

Всюду ниже мы будем предполагать, что матрица $\mathbf{G}$ диагональна, и ее элементы — неотрицательные рациональные числа. Итак, пусть линейный оператор, порожденный матрицей Ковалевской, имеет n_1-мерное ($n_1 < n$) инвариантное подпространство, на котором сужение данного оператора нильпотентно. Матрицу Ковалевской $\mathbf{K}$ представим в следующем блочном виде:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}$ — $(n - n_1) \times (n - n_1)$-матрица, $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{B}$ — прямоугольная $(n - n_1) \times n_1$-матрица, $\mathbf{J}$ — вырожденная $n_1 \times n_1$-матрица, подобная блочно-жордановой матрице с нулевой диагональю.

Разложим вектор $\mathbf{z}$ на две составляющие: $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, где $\boldsymbol{\xi}$ — проекция $\mathbf{z}$ на инвариантное подпространство, на котором оператор с матрицей $\mathbf{K}$ невырожден, а $\boldsymbol{\eta}$ — проекция на ортогональное дополнение к этому подпространству. Как было показано в предыдущем параграфе, при помощи линейного преобразования $\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi} + \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}$ матрицу $\mathbf{B}$ можно «убить».

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3.2.13). Эта система уравнений попадает под действие леммы 2.1.1 предыдущего параграфа, т. е. существует формальное многообразие рассматриваемой системы

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}),$$

такое, что редуцированная на это многообразие система (3.2.13) примет вид

$$\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{J}\boldsymbol{\eta} + \ldots = \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}). \tag{3.2.19}$$

К системе (3.2.19) можно применить разработанную в первой главе технику выделения квазиоднородных укорочений и построения формальных асимптотических решений. Пусть $\mathbf{G}_1$ — некоторая диагональная матрица с рациональными неотрицательными элементами. Имеет место

Теорема 3.2.2. *Пусть система* (3.2.19) *положительно полуквазиоднородна относительно структуры, порождаемой матрицей* $\mathbf{G}_1$ *и пусть найдется такой ненулевой вектор* $\boldsymbol{\eta}_0^\gamma \in \mathbb{R}^{n_1}$, *что имеет место равенство*

$$-\gamma \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\eta}_0^\gamma = \mathbf{h}_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{\eta}_0^\gamma) \tag{3.2.20}$$

(*здесь* $\gamma = \pm 1$ *фиксировано, а* $\mathbf{h}_{\mathrm{q}}$ *— квазиоднородное укорочение правой части системы* (3.2.19)). *Тогда исходная система* (3.2.8) *имеет частное* *решение* $\mathbf{x}(t)$*, которое может быть представлено в виде следующего формального ряда*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(t)(\gamma t)^{-a_k}, \tag{3.2.21}$$

где коэффициенты $\mathbf{x}_k(t)$ *могут быть, в свою очередь, представлены рядами*

$$\mathbf{x}_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{kj}(t)\big(\ln(\ln(\gamma t))(\ln(\gamma t))\big)^{-a_{kj}},$$

коэффициенты которых $x_{kj}(\cdot)$ *являются вектор-полиномами повторного логарифма* $\ln(\ln(\gamma t))$*, последовательность действительных чисел* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$*,* $a_0 \geqslant 0$ *монотонно стремится к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$*, а последовательность* $\{a_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}$ *монотонно стремится к* $+\infty$ *для каждого фиксированного* k *при* $j \to +\infty$*.*

Для указанного частного решения ряд (3.2.21) является асимптотическим рядом при $t \to \gamma \times \infty$.

В следующем параграфе мы дадим точное определение асимптотического ряда типа (3.2.21).

Доказательство почти очевидно. Воспользуемся теоремой 3.1.2. Из условий теоремы 3.2.2 (см. (3.2.20)) следует, что система (3.2.13) имеет формальное частное решение вида

$$\mathbf{z}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}_k\big(\ln(\gamma\tau)\big)(\gamma\tau)^{-b_k} \tag{3.2.22}$$

(последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $b_0 \geqslant 0$ монотонно стремится к $+\infty$, когда $k \to +\infty$).

Подставив ряд (3.2.22) в формулу для преобразования $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{z}$ (3.2.10), и возвращаясь к исходным переменным $\mathbf{x}, t$, получим утверждение теоремы 3.2.2. Здесь мы ограничимся установлением факта существования *формального* решения, оставив до следующего параграфа вопрос о соответствии этого формального решения некоторому действительному решению.

Теорема доказана.

Из приведенной конструкции видно, что если среди собственных чисел матрицы Ковалевской, вычисленной на решении типа квазиоднородного луча системы (3.2.19), есть нулевые, то принципиально возможно найти формальное частное решение исходной системы (3.2.8), содержащее повторные логарифмы третьего порядка. Повторяя данную процедуру, можно найти решения, содержащие повторные логарифмы любого порядка. Ограничением здесь может служить лишь размерность системы.

Отметим в заключение, что поскольку при построении рядов (3.2.21) мы воспользовались формальным частным решением системы (3.2.13), лежащим на формальном многообразии, задаваемым, как правило, *расходящимися* степенными рядами, то в типичном случае ряды (3.2.21) также расходятся.

3. Системы, неразрешенные относительно старших производных, и теория Кузнецова

В этом параграфе мы обсудим, наконец, соответствие формальных решений, построенных в §§ 1, 2, некоторым гладким решениям рассматриваемых систем дифференциальных уравнений. Однако сначала мы изучим проблему существования *формальных* асимптотических решений еще для одного класса дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, *неразрешенных* относительно старших производных

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \tag{3.3.1}$$

Пусть вектор-функция $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируема в окрестности $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, и пусть $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ является частным решением системы уравнений (3.3.1) ($\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

Определение 3.3.1. Систему уравнений (3.3.1) назовем *квазиоднородной* относительно структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}$ и будем помечать ее, как и прежде, индексом «q»

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \tag{3.3.2}$$

если существует такая квадратная матрица $\mathbf{Q}$ с действительными элементами, что для любых $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и любого $\mu \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{p}\big) = \mu^{\mathbf{Q}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \tag{3.3.3}$$

Равенство (3.3.3) означает, что квазиоднородная система (3.3.2) инвариантна относительно действия группы квазиоднородных растяжений:

$$\mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \quad t \mapsto \mu^{-1}t.$$

Определение 3.3.2. Систему уравнений (3.3.1) назовем *полуквазиоднородной*, если вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ может быть разложена в формальный ряд

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{m=0} \mathbf{F}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}, \mathbf{p}),$$

такой, что для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для любой m-й формы имеет место тождество

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}+\chi m}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{p}\big) = \mu^{\mathbf{Q}+m\beta\mathbf{E}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}+\chi m})(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \tag{3.3.4}$$

для $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и любого $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Если $\beta > 0$, то систему (3.3.1) назовем *положительно* полуквазиоднородной и *отрицательно* полуквазиоднородной в противном случае ($\beta < 0$).

Дадим интерпретацию квазиоднородных и полуквазиоднородных систем на языке диаграмм и многогранников Ньютона. Мы откажемся пока от требования $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, и будем лишь считать, что компоненты $F^1, \ldots, F^n$ вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ разложимы в формальные степенные ряды:

$$F^j = \sum_{i_1,\ldots,i_n,l_1,\ldots,l_n} F^j_{i_1,\ldots,i_n,l_1,\ldots,l_n}(x^1)^{i_1}\ldots(x^n)^{i_n}(p^1)^{l_1}\ldots(p^n)^{l_n}. \tag{3.3.5}$$

Определение 3.3.3. Пусть

$$F^j_{i_1,\ldots,i_n,l_1,\ldots,l_n}(x^1)^{i_1}\ldots(x^n)^{i_n}(p^1)^{l_1}\ldots(p^n)^{l_n}$$

— некоторый нетривиальный моном разложения (3.3.5) j-й компоненты вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ геометрическую точку с координатами $(i_1, \ldots, i_n, l_1, \ldots, l_n)$. Набор всех таких точек называется j-й *диаграммой Ньютона* $\mathfrak{D}_j$ системы уравнений (3.3.1), а ее выпуклая оболочка — j-м *многогранником Ньютона* $\mathfrak{P}_j$.

Пусть $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ и $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$ — диагональные матрицы с рациональными элементами. Полезно заметить, что все диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_j$ и многогранники Ньютона $\mathfrak{P}_j$ квазиоднородной системы уравнений типа (3.3.2) лежат в гиперплоскостях, задаваемых уравнениями

$$g_1 i_1 + \ldots + g_n i_n + (g_1+1)l_1 + \ldots + (g_n+1)l_n = q_j. \tag{3.3.6}$$

Многогранники Ньютона $\mathfrak{P}_j$ «опираются» на гиперплоскости, задаваемые уравнениями (3.3.6) в случае положительной полуквазиоднородности, т. е. для любой точки $(i_1, \ldots, i_n, l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{P}_j \setminus \Gamma_j$, где Γ_j — грань многогранника $\mathfrak{P}_j$, лежащая в рассматриваемой гиперплоскости, имеет место неравенство:

$$g_1 i_1 + \ldots + g_n i_n + (g_1+1)l_1 + \ldots + (g_n+1)l_n > q_j. \tag{3.3.7}$$

В случае отрицательной полуквазиоднородности $\mathfrak{P}_j$ «накрываются» этими гиперплоскостями, т. е. для любой точки $(i_1, \ldots, i_n, l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{P}_j \setminus \Gamma_j$ выполнено неравенство

$$g_1 i_1 + \ldots + g_n i_n + (g_1 + 1) l_1 + \ldots + (g_n + 1) l_n < q_j. \tag{3.3.8}$$

Равенство (3.3.6), а также неравенства (3.3.7), (3.3.8) можно использовать для выделения укорочений в системах типа (3.3.1), неразрешенных относительно производных. Очевидно, что, воспользовавшись алгоритмом, описанным в § 3 предыдущей главы, мы можем *любую* систему (3.2.1) представить в полуквазиоднородном виде. Следует заметить, что при выделении укорочения мы можем потерять *часть* и даже *все* производные по времени, т. е. укороченная система может быть гибридной системой дифференциально-алгебраических уравнений и даже просто системой алгебраических уравнений. Проиллюстрируем это обстоятельство на одном поучительном примере.

Пример 3.3.1. Рассмотрим систему уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - B)qr - Mg(y_0\gamma_z - z_0\gamma_y) = 0, \quad \dot{\gamma}_x - r\gamma_y + q\gamma_z = 0,\\
&B\dot{q} + (A - C)rp - Mg(z_0\gamma_x - x_0\gamma_z) = 0, \quad \dot{\gamma}_y - p\gamma_z + r\gamma_x = 0,\\
&C\dot{r} + (B - A)pq - Mg(x_0\gamma_y - y_0\gamma_x) = 0, \quad \dot{\gamma}_z - q\gamma_x + p\gamma_y = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

где (p, q, r) — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции твердого тела, $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ — проекции единичного вектора, сонаправленного с вертикалью, на эти оси, $(x_0, y_0, z_0,)$ — координаты центра масс в этих осях, A, B, C — главные моменты инерции твердого тела, M — его масса, g — ускорение свободного падения.

Легко видеть, что система уравнений (3.3.9) квазиоднородна относительно структуры, задаваемой матрицей $\mathbf{G} = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ в обычном смысле. Именно эту квазиоднородную структуру использовал А. М. Ляпунов в работе [80], посвященной изучению ветвления решений уравнений (3.3.9) в плоскости комплексного времени. С другой стороны, можно указать множество других структур с матрицами

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(g_p, g_q, g_r, g_{\gamma_x}, g_{\gamma_y}, g_{\gamma_z}),$$

относительно которых система (3.3.9) становится отрицательно полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.2.

Например, структура с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(s, s, s, 2s, 2s, 2s)$, $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 1$ «высекает» из (3.3.9) укорочение

$$\begin{aligned} &(C-B)qr - Mg(y_0\gamma_z - z_0\gamma_y) = 0, \qquad && r\gamma_y - q\gamma_z = 0, \\ &(A-C)rp - Mg(z_0\gamma_x - x_0\gamma_z) = 0, && p\gamma_z - r\gamma_x = 0, \\ &(B-A)pq - Mg(x_0\gamma_y - y_0\gamma_x) = 0, && q\gamma_x - p\gamma_y = 0, \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

представляющее собой алгебраическую систему уравнений.

Квазиоднородная структура с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ приводит к системе дифференциальных уравнений, фактически описывающих движение твердого тела по инерции (случай Эйлера)

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C-B)qr = 0, \quad && \dot{\gamma}_x - r\gamma_y + q\gamma_z = 0, \\ &B\dot{q} + (A-C)rp = 0, && \dot{\gamma}_y - p\gamma_z + r\gamma_x = 0, \\ &C\dot{r} + (B-A)pq = 0, && \dot{\gamma}_z - q\gamma_x + p\gamma_y = 0, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

в качестве укорочения.

Система дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C-B)qr - Mg(y_0\gamma_z - z_0\gamma_y) = 0, \quad && r\gamma_y - q\gamma_z = 0, \\ &B\dot{q} + (A-C)rp + Mgx_0\gamma_z = 0, && \dot{\gamma}_y - p\gamma_z = 0, \\ &C\dot{r} + (B-A)pq - Mgx_0\gamma_y = 0, && \dot{\gamma}_z + p\gamma_y = 0, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

получается как укорочение системы (3.3.9) в квазиоднородной шкале, порожденной группой растяжений с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 2, 2)$.

Этот список укорочений можно было бы продолжить. Еще больше возможностей предоставляют различные частные случаи системы (3.3.9), когда два из трех моментов инерции равны друг другу или центр масс тела лежит в одной из плоскостей инерции.

Рассмотрим укороченную квазиоднородную систему (3.3.2). Эта система допускает частное решение типа квазиоднородного луча

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^\gamma, \tag{3.3.13}$$

если существуют такие $\gamma = \pm 1$ и $\mathbf{x}_0^\gamma$ — постоянный ненулевой действительный вектор, что

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma) = 0. \tag{3.3.14}$$

Попробуем найти формальное частное решение системы (3.3.1) в знакомом виде

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(\gamma t)\bigr)(\gamma t)^{-k\beta.} \tag{3.3.15}$$

В системе (3.3.1) сделаем замену зависимой и независимой переменных

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(\gamma t), \quad s = (\gamma t)^{-\beta},$$

после которой эта система примет вид

$$\sum_{m=0} s^m \mathbf{F}_{q+\chi m}\big(\mathbf{y}, -\gamma(\beta s\mathbf{y}' + \mathbf{G}\mathbf{y})\big) = \mathbf{0}, \tag{3.3.16}$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной s, а формальное решение (3.3.15) превратится в

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(-\frac{1}{\beta}\ln s\big)s^k. \tag{3.3.17}$$

Подставляя (3.3.17) в (3.3.16), получим цепочку уравнений для $\mathbf{x}_k(\tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где τ — «логарифмическое время»: $\tau = -{}^1\!/_\beta \ln s = \ln(\gamma t)$.

Постоянный ненулевой вектор $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\gamma$ можно найти из системы (3.3.14), гарантирующей существование частного решения (3.3.13) укороченной системы (3.3.2). Для векторов с номерами, большими или равными единице будем иметь

$$\left[\gamma d_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)\left(\frac{d}{d\tau} - (\mathbf{G} + k\beta\mathbf{E})\right) d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)\right]\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\tau), \tag{3.3.18}$$

где $\mathbf{\Phi}_k(\tau)$ являются полиномиальными вектор-функциями предшествующих коэффициентов $\mathbf{x}_0(\tau), \ldots, \mathbf{x}_{k-1}(\tau)$.

Если бы матрица $d_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)$ была бы невырожденной, то линейная система (3.3.18) принципиально не отличалась бы от системы(1.1.20) и разрешалась точно также. Случай, когда $\det(d_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, - -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)) = 0$ требует тщательного исследования. Согласно [130], существует такая симметричная невырожденная матрица $\mathbf{C}$, что $\mathbf{A} = \gamma\mathbf{C}d_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)$ — симметричная матрица.

Систему (3.3.18) перепишем в виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k' + \mathbf{B}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{\Psi}_k(\tau), \tag{3.3.19}$$

где

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{C}\big(d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma) - \gamma d_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma, -\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma)(\mathbf{G} + k\beta\mathbf{E})\big),$$
$$\mathbf{\Psi}_k = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку матрица $\mathbf{A}$ симметрична, то пространство $\mathbb{R}^n$ можно разложить в прямую сумму образа и ядра оператора с матрицей $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{x}_k = (\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$, $\boldsymbol{\Psi}_k = (\boldsymbol{\Theta}_k, \boldsymbol{\Omega}_k)$, где $\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\Theta}_k$ и $\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\Omega}_k$ — проекции векторов $\mathbf{x}_k$ и $\boldsymbol{\Psi}_k$ на образ и ядро оператора с матрицей $\mathbf{A}$ соответственно. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_k$ представим в блочном виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_k^{(1)} & \mathbf{B}_k^{(2)} \\ \mathbf{B}_k^{(3)} & \mathbf{B}_k^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{B}_k^{(1)}, \mathbf{B}_k^{(2)}, \mathbf{B}_k^{(3)}, \mathbf{B}_k^{(4)}$ — соответственно матрицы размером $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (n-r)$, где r — ранг матрицы $\mathbf{A}$.

Система уравнений (3.3.19) записывается при этом в виде:

$$\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_k' + \mathbf{B}_k^{(1)}\boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{B}_k^{(2)}\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\Theta}_k(\tau), \quad \mathbf{B}_k^{(3)}\boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{B}_k^{(4)}\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\Omega}_k(\tau). \quad (3.3.20)$$

Предположим, что $\det \mathbf{B}_k^{(4)} \neq 0$. Тогда из второй системы в (3.3.20) переменные $\boldsymbol{\eta}_k$ можно выразить через $\boldsymbol{\xi}_k$ и известные полиномы $\boldsymbol{\Omega}_k(\tau)$:

$$\boldsymbol{\eta}_k = \left(\mathbf{B}_k^{(4)}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Omega}_k(\tau) - \mathbf{B}_k^{(3)}\boldsymbol{\xi}_k\right). \quad (3.3.21)$$

Подставляя (3.3.21) в первую систему (3.3.20), получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и полиномиальной неоднородностью

$$\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_k' + \left(\mathbf{B}_k^{(1)} - \mathbf{B}_k^{(2)}\big(\mathbf{B}_k^{(4)}\big)^{-1}\mathbf{B}_k^{(3)}\right)\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\Theta}_k(\tau) - \mathbf{B}_k^{(2)}\big(\mathbf{B}_k^{(4)}\big)^{-1}\boldsymbol{\Omega}_k(\tau). \quad (3.3.22)$$

Поскольку $\det \widehat{\mathbf{A}} \neq 0$, система (3.3.22) всегда имеет полиномиальное решение $\boldsymbol{\xi}_k(\tau)$. Подставив это решение в (3.3.21), найдем вторую компоненту — $\boldsymbol{\eta}_k(\tau)$.

Таким образом, можно найти по индукции все коэффициенты ряда (3.3.15). Итак, нами фактически доказана

Теорема 3.3.1. *Пусть система* (3.3.1) *положительно полуквазиоднородна в смысле определения* 3.3.2 *относительно структуры с диагональной матрицей* $\mathbf{G}$ *и ее квазиоднородное укорочение* (3.3.2) *имеет частное решение* (3.3.14) *в виде квазиоднородного луча, т. е. существуют такие* $\gamma = \pm 1$ *и* $\mathbf{x}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$ *— ненулевой вектор, что выполнена система равенств* (3.3.14). *Пусть, далее,* $\det \mathbf{B}_k^{(4)} \neq 0$ *для любого натурального числа* $k = 1, 2, \ldots$ *Тогда* (3.3.1) *имеет гладкое частное решение* $\mathbf{x}(t)$ *с главным членом асимптотики* $\mathbf{x}(t) \sim (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^\gamma$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Здесь мы будем вынуждены сделать ряд оговорок.

Замечание 3.3.1. Мы снова ограничились лить построением формального решения системы (3.3.1) в виде ряда (3.3.15). Поскольку при принятом способе выделения укорочений могут быть потеряны некоторые производные, то естественно ожидать, что построенные ряды будут расходиться. Ниже мы сформулируем результат, который позволит нам утверждать, что построенному формальному решению соответствует некоторое фактическое решение с требуемой асимптотикой. Однако для его применения нам необходимо потребовать, чтобы матрица $\mathbf{G}$ была диагональной и степени γt в (3.3.15) были отрицательны, хотя при построении *формального* решения эти ограничения никак не использовались.

Теорема 3.3.1 является уточнением теоремы работы [196].

Условие $\det \mathbf{B}_k^{(4)} \neq 0$ не является, разумеется, *необходимым* условием разрешимости системы (3.3.19), однако, в общем виде эти условия слишком громоздки и трудно проверяемы.

Рассмотрим пример, являющийся «возмущением» примера 1.1.1 § 1.

Пример 3.3.2. «Испортим» систему (3.1.1), добавив в первое и второе уравнения нелинейные члены:

$$\dot{x} + x - y + X(x, y) = 0, \quad \dot{y} + y^2 + Y(x, y) = 0, \tag{3.3.23}$$

где

$$X(x, y) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i+j\geqslant 2}}^{\infty} X_{ij} x^i y^j, \quad Y(x, y) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i+j\geqslant 3}}^{\infty} Y_{ij} x^i y^j$$

Система (3.3.23) является положительно полу-(квази)однородной относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathbf{E} = \mathrm{diag}(1, 1)$ $(\beta = 1)$. Ее укорочение имеет вид

$$y - x = 0, \quad \dot{y} + y^2 = 0.$$

Эта гибридная система имеет очевидное асимптотическое решение в виде луча:

$$x^+(t) = y^+(t) = t^{-1}.$$

Асимптотическое решение полной системы (3.3.23) нужно искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\ln t) t^{-k-1}, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\ln t) t^{-k-1}. \tag{3.3.24}$$

Уравнения для определения коэффициентов $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$ имеют вид

$$y_k' + (1 - k) y_k = \theta_k(\tau), \quad x_k - y_k = \omega_k(\tau),$$

где θ_k, ω_k — полиномы от τ.

Последняя система, разумеется, разрешима для любого $k = 1, 2, \ldots$, и аналогом матриц $\mathbf{B}_k^{(4)}$ здесь является число $1 \neq 0$.

Рассмотрим один тип систем уравнений *высших порядков*, неразрешенных относительно старших производных:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}), \tag{3.3.25}$$

для которых можно указать условия существования частных решений в виде рядов (3.3.15).

Как правило, мы будем предполагать, что $\mathbf{x}(t) = 0$ является решением системы (3.3.25), т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, и будем искать решения, асимптотические к этому тривиальному решению.

Определение 3.3.4. Систему (3.3.25) назовем *квазиоднородной* относительно структуры с матрицей $\mathbf{G}$, если ее правая часть $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_{\mathrm{q}}\bigl(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}^{(0)}, \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(1)}, \mu^{\mathbf{G}+2\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}+p\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(p)}\bigr) = \\ = \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\bigl(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}\bigr) \end{gathered} \tag{3.3.26}$$

для любых $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)})$ и $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Определение 3.3.5. Если существует такое $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что правая часть (3.3.25) раскладывается в формальный ряд

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}) = \sum_{m=0} \mathbf{f}_{q+\chi m}\bigl(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}\bigr)$$

такой, что для каждой m-й формы имеет место тождество

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}\bigl(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}^{(0)}, \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(1)}, \mu^{\mathbf{G}+2\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}+p\mathbf{E}}\mathbf{x}^{(p)}\bigr) = \\ = \mu^{\mathbf{G}+(1+m\beta)\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}\bigl(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}\bigr) \end{gathered} \tag{3.3.27}$$

для любых $\bigl(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(p)}\bigr) \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$ и $\mu \in \mathbb{R}^+$, то систему (3.3.25) будем называть *полуквазиоднородной*.

При положительных β систему (3.3.25) назовем *положительно* полуквазиоднородной, и *отрицательно* полуквазиоднородной — в противном случае.

Мы рассмотрим частный случай систем (3.3.25), правая часть укорочения которых *не зависит* от производных вектор-функции $\mathbf{x}(t)$. Итак, пусть укороченная система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}). \tag{3.3.28}$$

Теорема 3.3.2. *Пусть система* (3.3.25) *положительно полуквазиоднородна в смысле определения* 3.3.5 *относительно структуры с диагональной матрицей* $\mathbf{G}$ *и ее квазиоднородное укорочение* (3.3.28) *имеет частное решение в виде квазиоднородного луча, т. е. существуют* $\gamma = \pm 1$ *и* $\mathbf{x}_0^\gamma$ *— ненулевой вектор, удовлетворяющие системе равенств*

$$-\gamma \mathbf{G}\mathbf{x}_0^\gamma = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma). \tag{3.3.29}$$

Тогда (3.3.25) *имеет гладкое частное решение* $\mathbf{x}(t)$ *с главным членом асимптотики* $\mathbf{x}(t) \sim (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma)$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Следует отметить, что теорема 3.3.2 в некотором смысле «удобнее» теоремы 3.3.1, поскольку ее условия не содержат требования невырожденности матрицы $\mathbf{B}_k^{(4)}$, проверка которого требует дополнительных вычислений.

Доказательство. Кажется разумным привести n-мерную систему p-го порядка (3.3.25) к эквивалентной np-мерной системе первого порядка и применить к полученной системе теорему 3.3.1. Однако нетрудно заметить, что условие $\det \mathbf{B}_k^{(4)} \neq 0$ в этом случае будет нарушено, поэтому докажем теорему 3.3.2 непосредственно. Найдем частное формальное решение (3.3.25) в виде формального ряда (3.3.15). Как и при доказательстве предыдущей теоремы, воспользуемся заменой

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(\gamma t), \quad s = (\gamma t)^{-\beta}.$$

Высшие производные примут при этом вид:

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = (\gamma t)^{-(\mathbf{G}+j\mathbf{E})}\mathbf{y}^{[j]}(s), \quad j = 1, \ldots, p,$$

где введено обозначение

$$\mathbf{y}^{[j]}(s) = (-\gamma)^j \sum_{i=0}^{j} \left(C_j^i \left(\prod_{l=0}^{j-i-1} (\mathbf{G} + l\mathbf{E}) \right) \sum_{r=0}^{i} s^r a_i^r(\beta) \frac{d^r}{ds^r}\mathbf{y}(s) \right).$$

Здесь $C_j^i = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$, а $a_i^r(\beta)$ — некоторые полиномы от β степени i с целыми положительными коэффициентами.

Следовательно, в силу тождеств (3.3.26), (3.3.27) после указанной замены система уравнений (3.3.25) примет вид

$$-\gamma\beta s\mathbf{y}' = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}\big(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{[1]}, \ldots, \mathbf{y}^{[p]}\big). \tag{3.3.30}$$

Теперь поиск коэффициентов ряда (3.3.15) будет практически дословно повторять процедуру поиска коэффициентов ряда (1.1.16) при доказательстве теоремы 1.1.2. Например, нулевой коэффициент может быть найден из системы (3.3.29). Благодаря тому факту, что правая часть укороченной системы (3.3.28) не зависит от производных, линейная система уравнений для определения $\mathbf{x}_k(\tau)$, $\tau = \ln(\gamma t)$, будет иметь вид (1.1.20), где теперь Φ_k являются полиномиальными вектор-функциями не только $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$, но и их производных по τ. Следовательно, $\mathbf{x}_k(\tau)$ можно теперь найти как полиномиальное частное решение этой системы.

Теорема доказана.

Пример 3.3.3. Покажем, как использовать теорему 3.3.2 для нахождения условий существования асимптотических решений (3.3.24) системы (3.3.23), рассмотренной в примере 3.3.2. Продифференцировав по времени первое уравнение системы и подставив в него выражение для $\dot{y}$ из второго уравнения, получим систему

$$\begin{gathered} \dot{x} = -\ddot{x} - \big(y^2 + Y(x,y)\big)\left(1 - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\right) - \frac{\partial X}{\partial x}(x,y)\dot{x}, \\ \dot{y} = -y^2 - Y(x,y). \end{gathered} \tag{3.3.31}$$

В принципе, системы (3.3.23) и (3.3.31) не эквивалентны, однако, *асимптотические* к началу координат решения обеих систем должны совпадать.

Система (3.3.31) положительно полу-(квази)однородна относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathbf{E} = \mathrm{diag}(1,1)$. Ее укорочение имеет, очевидно, следующий вид:

$$\dot{x} = -y^2, \quad \dot{y} = -y^2.$$

Асимптотическое решение этой системы двух уравнений первого порядка очевидно:

$$x^+(t) = y^+(t) = t^{-1}.$$

Следовательно, все условия теоремы 3.3.2 выполнены, и система (3.3.23) имеет частное решение, для которого ряды (3.3.24) будут представлять собой асимптотическое разложение при $t \to +\infty$.

Замечание 3.3.2. Теорема 3.3.2 остается верной и в том случае, если правые части системы (3.3.25) представляются степенными рядами, содержащими компоненты *бесконечного* числа производных вектор-функции $\mathbf{x}(t)$. В приложении А мы столкнемся с конкретной задачей, где такая ситуация будет иметь место.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.3. Следует отметить, что теоремы 3.3.1 и 3.3.2 остаются верными и тогда, когда укороченные системы имеют *комплексное* решение в виде луча. В этом случае коэффициенты рядов (3.3.15) будут также комплексными.

Итак, обсудим, наконец, проблему соответствия формальных решений систем дифференциальных уравнений их фактическим решениям с требуемой асимптотикой. Для этого мы рассмотрим самый общий случай изучавшихся систем, а именно, системы типа (3.3.1), неразрешенные относительно производных.

Рассмотрим следующую конструкцию, принадлежащую А. Н. Кузнецову.

Определим рекурсивно повторные логарифмы и экспоненты:

$$\ln_0 t = e_0(t) = t, \quad \ln_N t = e_{-N}(t) = \ln(\ln_{N-1} t),$$
$$e_N = \ln_{-N} t = \exp\bigl(e_{N-1}(t)\bigr), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Экспоненты с отрицательными номерами ассоциируются с логарифмами с положительными номерами, и наоборот.

Построим индуктивным образом следующее поле $\mathfrak{R}_{M,N}$, $M, N \in \mathbb{Z}$, $M \leqslant N$ формальных функциональных рядов с операциями почленного сложения и умножения рядов, содержащих только логарифмы с номерами, лежащими внутри отрезка $[M, N]$. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ не содержит никаких логарифмов и принадлежит по определению полю $\mathfrak{R}_{M,N}$ для любых M, N. Пусть, далее, $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — последовательность действительных чисел, строго монотонно стремящихся к $+\infty$. Если $\{a_k\}_{k=0}^{K}$ — конечная последовательность, то будем считать, что $a_{K+1} = a_{K+2} = \ldots = +\infty$. Пусть $M < N$. Рассмотрим последовательность $\{\widehat{x}_k\}_{k=0}^{+\infty}$, элементы которой принадлежат $\mathfrak{R}_{M+1,N} \subset \mathfrak{R}_{M,N}$. Тогда $\mathfrak{R}_{M,N}$ — поле рядов вида:

$$\widehat{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{x}_k \ln_M^{-a_k} t.$$

На $\mathfrak{R}_{M,N}$ можно определить естественным образом почленное формальное дифференцирование:

$$\frac{d}{dt}\bigl(\widehat{x}_k \ln_M^{-a_k} t\bigr) = \left(\frac{d\widehat{x}_k}{d\tau} - a_k \widehat{x}_k\right) \ln_M^{-a_k} t \prod_{s=0}^{M} \ln_s^{-1} t, \tag{3.3.32}$$

где $\tau = \ln_{M+1} t$.

Заметим, что любой ряд из $\mathfrak{R}_{M,N}$ можно представить в виде некоторой формальной суммы мономов с действительными коэффициентами. Каждый моном является произведением конечного числа повторных логарифмов, взятых в действительных степенях. Совокупность всех таких мономов вполне упорядочена отношением $\prec$. Это означает следующее. Пусть $\phi(t)$ и $\psi(t)$ — два монома из указанного множества, тогда $\phi \prec \psi$ эквивалентно тому, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0.$$

Все ряды $\widehat{x}_k$, участвующие в индуктивном построении данного ряда, и сам ряд мы будем называть *промежуточными* рядами. Для любого промежуточного ряда можно найти самый старший логарифм и самую старшую экспоненту, входящие в ряд. Тогда ряд раскладывается по степеням старшей экспоненты с коэффициентами-рядами, зависящими от младших экспонент.

Рассмотрим теперь формальные вектор-ряды $\widehat{\mathbf{x}}_k$, компоненты которых принадлежат некоторому полю $\mathfrak{R}_{M,N}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3.3.1), для которой компоненты вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ являются формальными степенными рядами относительно компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$. Подставим в (3.3.1) вместо $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ формальные ряды $\widehat{\mathbf{x}}_k, \dot{\widehat{\mathbf{x}}}_k$. В результате получим векторные ряды, компоненты которых принадлежат $\mathfrak{R}_{M,N}$. Из (3.3.1), приравнивая к нулю ряды-коэффициенты при старших экспонентах, получим *индуцированные соотношения* для *промежуточных* рядов. Отметим, что промежуточные ряды могут не стремиться к нулю, т.е. их члены могут не стремиться к нулю, но в этом случае в индуцированное соотношение они входят полиномиально.

Определение 3.3.6. Будем говорить, что ряд $\widehat{x}_k \in \mathfrak{R}_{M,N}$ является *асимптотическим разложением* некоторой гладкой функции $x(t)$ ($x(t) \sim \widehat{x}_k$), если для любого $K = 1, 2, \ldots$ имеет место соотношение

$$x(t) - \sum_{k=0}^{K} \widehat{x}_k(t) \ln_M^{-a_k} t = o\left(\ln_M^{-a_K} t\right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Определение 3.3.7. *Сложная асимптотика* ($x(t) \sim \widehat{x} \in \mathfrak{R}_{M,N}$) — это рекурсивное отношение между рядом $\widehat{x}$ и семейством функций $\{x, x_k, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, такое, что эти функции биективно помечены промежуточными рядами $\{\widehat{x}, \widehat{x}_k, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, а шагам рекурсии в построении ряда $\widehat{x}$ вида

$$\widehat{x}_l = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{x}_k^* \ln_{M+1}^{-b_k} t$$

соответствуют асимптотики

$$x_l(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k^* \ln_{M+1}^{-b_k} t \in \mathfrak{R}_{M+1,N}.$$

Будем рассматривать только *гладкие* асимптотики, т. е. такие, которые выдерживают дифференцирование по правилу (3.3.32).

Определение 3.3.8. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — некоторое частное решение системы (3.3.1), компоненты которого имеют сложную асимптотику. Тогда будем говорить, что само решение обладает сложной асимптотикой $\mathbf{x} \sim \widehat{\mathbf{x}}$. Скажем также, что эта сложная асимптотика удовлетворяет системе (3.3.1), если все промежуточные ряды удовлетворяют индуцированным соотношениям.

Теорема 3.3.3. [68] *Если система* (3.3.1) *с аналитической вектор-функцией* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ *имеет формальное решение, компоненты которого принадлежат некоторое полю* $\mathfrak{R}_{M,N}$*, то эта система имеет и фактическое гладкое решение, обладающее сложной асимптотикой.*

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и мы его здесь приводить не будем. Следует отметить, что первоначально теорема 3.3.3 была доказана для случая, когда система разрешена относительно производной, а формальное решение представляет собой ряд лорановского типа по отрицательным дробным степеням независимой переменной [75]. Однако и в этом относительно простом случае доказательство весьма непросто.

Эта теорема фактически заполняет пробелы в доказательствах теорем 3.1.2, 3.1.5, 3.2.2, 3.3.1 и 3.3.2 этой главы. Справедливости ради следует заметить, что даже в своей достаточно общей формулировке теорема 3.3.3 не покрывает всех случаев, которые могут возникнуть при построении формальных решений. В частности ею можно пользоваться лишь при анализе асимптотических решений, т. е. *входящих* в особую точку или *выходящих* из нее. Это означает, что данная теорема не охватывает случай *отрицательно* полуквазиоднородных систем в смысле определений 3.3.2 или 3.3.5. Возникает также и ряд других ограничений. Например, в теореме 3.1.5 пришлось потребовать, чтобы все ненулевые собственные значения матрицы линейного приближения были действительными и т. д.

Обратимся к одной конкретной задаче, не относящейся напрямую к рассматриваемому кругу проблем, однако, тесно с ним связанной.

Пример 3.3.4. Вот уже более ста лет внимание исследователей привлекает задача нахождения условий, достаточных для того, чтобы решения системы уравнений Эйлера–Пуассона (3.3.9) были бы однозначными функциями времени в комплексной области. Эта проблема берет начало с работы С. В. Ковалевской [175], опубликованной в 1889–1890 гг. В классических случаях Эйлера и Лагранжа интегрируемости системы Эйлера – Пуассона решения могут быть выражены в терминах эллиптических функций, т. е. являются мероморфными функциями комплексного времени. Ковалевская изучала вопрос, в каких еще случаях, кроме известных на тот момент случаях Эйлера и Лагранжа, решения могут быть разложены в ряды Лорана

$$\begin{aligned} p(t) &= t^{-g_p} \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, & \gamma_x(t) &= t^{-g_{\gamma_x}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{x_k} t^k, \\ q(t) &= t^{-g_q} \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k, & \gamma_y(t) &= t^{-g_{\gamma_y}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{y_k} t^k, \\ r(t) &= t^{-g_r} \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k, & \gamma_z(t) &= t^{-g_{\gamma_z}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{z_k} t^k, \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

где среди целых чисел $g_p, g_q, g_r, g_{\gamma_x}, g_{\gamma_y}, g_{\gamma_z}$ по крайней мере одно положительно, и не имеют других подвижных особенностей, кроме полюсов (то, что в обширной литературе, публикуемой западными физиками-теоретиками, носит название *свойства Пенлеве*). Изучался также вопрос о том, от скольких произвольных постоянных зависят коэффициенты в разложениях (3.3.33). В алгебраически интегрируемой ситуации их должно быть пять. Исходя из уравнений движения (3.3.9), Ковалевская заключила, что значения показателей максимальных степеней t^{-1} в рядах (3.3.33) должны быть следующими:

$$g_p = g_q = g_r = 1, \quad g_{\gamma_x} = g_{\gamma_y} = g_{\gamma_z} = 2.$$

Этот выбор представляется естественным, поскольку система уравнений Эйлера – Пуассона (3.3.9) квазиоднородна относительно структуры с диагональной матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$. Пользуясь разложениями (3.3.33), Ковалевская установила, что решения системы (3.3.9) не ветвятся, если параметры системы удовлетворяют соотношениям, соответствующим случаям Эйлера, Лагранжа и найденному ею новому случаю, носящему ныне имя Ковалевской. Затем был найден недостающий четвертый интеграл уравнений Эйлера – Пуассона. Работа Ковалевской была подвергнута критике А. А. Марковым (см. [37]). В частности, он обратил внимание, что значения ведущих показателей в (3.3.33) могут быть иными, чем указанные Ковалевской. Например, набор $g_p, g_q, g_r, g_{\gamma_x}, g_{\gamma_y}, g_{\gamma_z}$ может быть следующим:

$$g_p = g_q = g_r = 2, \quad g_{\gamma_x} = g_{\gamma_y} = g_{\gamma_z} = 4.$$

Г. Г. Аппельрот [2] и П. А. Некрасов [92] также обратили внимание на соображения Маркова. Аппельрот изучил проблему разложимости решений в ряды (3.3.33), где

$$g_p = g_q = g_r = s, \quad g_{\gamma_x} = g_{\gamma_y} = g_{\gamma_z} = 2s, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s \neq 1.$$

При соответствующих ограничениях на параметры задачи Аппельрот нашел лорановские расхождения, коэффициенты которых зависели от *пяти* произвольных постоянных, что указывало на возможность *полной* интегрируемости. Эти ограничения совпали с условиями *частичной* интегрируемости, указанными ранее Гессом [167]. Тем не менее недостающий первый интеграл так и не был найден. Проблему его поиска практически «закрыл» Ляпунов [80], доказав, что если параметры $A, B, C, x_0, y_0, z_0, Mg$ не подчиняются условиям, соответствующим случаям Эйлера, Лагранжа или Ковалевской, то *общее* решение системы Эйлера – Пуассона (3.3.9) ветвится в комплексной области. Таким образом, в случаях, отличных от перечисленных трех, только решения, начальные условия которых подчиняются некоторым наперед заданным соотношениям, могут быть мероморфными функциями. Это означает, что методом Ковалевской можно искать только частные случаи интегрируемости. Например, А. А. Богоявленским [19, 18] при помощи метода Ковалевской были найдены семейства частных решений уравнений Эйлера – Пуассона (3.3.9), зависящие менее чем от пяти параметров. Это утверждение ставит также под сомнение и процитированный нами результат Аипельрота. Ниже мы попытаемся дать некоторое разумное объяснение этому противоречию с позиции изложенной выше теории, которое, тем не менее, не следует рассматривать как строгое математическое доказательство, а сейчас приведем еще несколько литературных ссылок. Как уже отмечалось во введении, в последние два десятилетия особенно среди физиков-теоретиков возрос интерес к методу Ковалевской как к средству предсказания хаотического поведения динамических систем. Здесь следует упомянуть уже цитировавшиеся работы [153, 152, 192]. В этих работах при помощи метода Ковалевской изучался характер ветвления в комплексной области решений систем уравнений Лоренца и Хенона – Хейлеса. В сравнительно недавних работах [149, 161] с этих же позиций анализировались уравнения движения осциллятора Дуффинга – ван дер Поля. Не была обойдена вниманием и классическая задача о поведении в комплексной области решений системы Эйлера – Пуассона [152]. Далее, в работе [79] *полностью* исследована задача о построении решений системы (3.3.9) в виде (3.3.33), для всех возможных наборов чисел $g_p, g_q, g_r, g_{\gamma_x}, g_{\gamma_y}, g_{\gamma_z}$: найдены условия, при которых ряды (3.3.33) могут быть достроены до конца и определено количество постоянных, от которых зависят их коэффициенты.

Пусть зафиксирован некоторый набор чисел $g_p, g_q, g_r, g_{\gamma_x}, g_{\gamma_y}, g_{\gamma_z}$, определяющий наинизшие члены в разложениях Лорана (3.3.33). Этот набор чисел определяет некоторую квазиоднородную шкалу. В соответствии с этим наинизшие члены разложения будут решениями укороченной (в смысле введенной шкалы) системы уравнений. Например, набор показателей, предложенный Аппельротом, приводит к системе (3.3.10), взяв [152]

$$g_p = g_q = g_r = g_{\gamma_x} = g_{\gamma_y} = g_{\gamma_z} = 1,$$

получим в качестве укорочения систему (3.3.11), если же, как предложено в той же работе [152],

$$g_p = g_q = g_r = g_{\gamma_x} = 1 \quad g_{\gamma_y} = g_{\gamma_z} = 2,$$

то укороченной системой становится система (3.3.12).

Следует отметить, что из перечисленных систем(3.3.10)–(3.3.12) лишь система (3.3.11) является системой дифференциальных уравнений, т. е. только соответствующий ей выбор квазиоднородной шкалы приводит к *регулярной* задаче. В остальных же случаях (кроме, разумеется, системы показателей, предложенных самой Ковалевской) мы будем иметь дело с *сингулярными* задачами. Разобранные нами примеры показывают, что получаемые при этом ряды, как правило, расходятся, и поэтому не могут изображать какую-либо мероморфную функцию. Следовательно, анализ этих рядов не имеет отношения к методу Ковалевской. Более того, формально мы не можем опереться даже на теорию Кузнецова для того, чтобы заключить, что существуют хотя бы *бесконечно-дифференцируемые* решения системы (3.3.9), для которых (3.3.33) будут асимптотическими рядами, потому что относительно соответствующих шкал (3.3.9) будет *отрицательно* полуквазиоднородной, и решения, изображаемые рядами (3.3.33) не являются *асимптотическими*. В частности, этими соображениями может объясняться тот факт, что ряды, построенные Аппельротом, содержат *пять* произвольных постоянных. Эти ряды, по-видимому, расходятся и поэтому не соответствуют никакой мероморфной функции.

Отметим, что дифференциальные уравнения с полиномиальными правыми частями могут допускать несколько *существенно различных* семейств мероморфных решений, зависящих от «полного» количества постоянных параметров. Это явление легко уяснить на простом примере уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad H = \frac{y^2}{2} + f_{n+1}(x), \tag{3.3.34}$$

где $f = -ax^{n+1} + bx^n + \ldots$ — многочлен с постоянными коэффициентами ($a \neq 0$). Рассмотрим задачу о наличии у этой системы формально-мероморфных решений вида

$$x = \frac{X_{-\alpha}}{t^\alpha} + \frac{X_{-\alpha+1}}{t^{\alpha-1}} + \ldots, \quad y = \frac{Y_{-\beta}}{t^\beta} + \frac{Y_{-\beta+1}}{t^{\beta-1}} + \ldots. \tag{3.3.35}$$

Здесь α и β — целые неотрицательные числа, причем $\alpha + \beta \geqslant 1$. Коэффициенты $X_{-\alpha}, \ldots, Y_{-\beta}, \ldots$ $(X_{-\alpha} \neq 0, Y_{-\beta} \neq 0)$ могут принимать комплексные значения. Нас будет интересовать «полное» решение системы (3.3.34). В этом случае коэффициенты разложения (3.3.35) должны содержать «модуль» — произвольный параметр. Еще один свободный параметр возникает при замене в (3.3.35) t на $t - t_0$.

Числом Ковалевской $\mathbf{k}$ системы (3.3.34) называется количество различных однопараметрических семейств мероморфных решений вида (3.3.35). Эти числа ведены в работе [67] для произвольных систем с полиномиальными правыми частями. Для системы (3.3.34) числа Ковалевской следующие: если $n = -1, 0, 1$ или $n \geqslant 4$, то $\mathbf{k} = 0$; если $n = 2$, то $\mathbf{k} = 1$; наконец, при $n = 3$ число $\mathbf{k}$ равно 2. В [67] числа Ковалевской подсчитаны для многомерных гамильтоновых систем, описывающих динамику обобщенных цепочек Тоды.

В заключение рассмотрим еще одну практическую задачу.

Пример 3.3.5. Вернемся к исследованию асимптотик решений задачи Хилла, рассмотренной в главе 1 (см. пример 1.4.4). Пример задачи Хилла прекрасно иллюстрирует зависимость метода построения асимптотических разложений частных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений от выбора конкретной системы координат. Система уравнений (1.4.8) не допускает, по-видимому, никаких других групп растяжений, относительно которых она являлась бы полуквазиоднородной в *классическом* смысле определения 1.1.4, кроме рассмотренных. Нет также никакой очевидной группы, относительно которой (1.4.8) была бы полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.2 и удовлетворяла бы условиям теоремы 3.3.1. Тем не менее, в работе [191] построены другие решения, отличные от описывающих классические траектории столкновения, имеющие асимптотические разложения типа (3.3.15). Этот факт наводит на мысль о существовании некоторой «скрытой» квазиоднородной шкалы. Действительно, сделаем линейную замену переменных

$$u = p_x + y, \ \ v = x + 2p_y, \ \ \xi = \frac{2}{3}p_x + \frac{1}{3}y, \ \ \eta = x + p_y, \ \ \sigma = s, \tag{3.3.36}$$

после которой уравнения (1.4.8) примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{u} = v + (v - 2\eta)\sigma^3, && \dot{v} = -u + 2(3\xi - 2u)\sigma^3, \\ &\dot{\xi} = \eta + \frac{2}{3}(v - 2\eta)\sigma^3, && \dot{\eta} = (3\xi - 2u)\sigma^3, \\ &\dot{\sigma} = -(3uv - 6\xi v - 4u\eta + 9\xi\eta)\sigma^3. \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Переписанная в виде системы, неразрешенной относительно производных, система (3.3.37) положительно полуквазиоднородна. Подвергнув ее действию группы квазиоднородных растяжений с матрицей $\mathbf{G} = \operatorname{diag}(0, 0, -1, 0, 1)$, т. е. совершив преобразование

$$u \mapsto u, \quad v \mapsto v, \quad \xi \mapsto \mu^{-1}\xi, \quad \eta \mapsto \eta, \quad \sigma \mapsto \mu\sigma, \quad t \mapsto \mu^{-1}t,$$

получим

$$\begin{aligned} &\mu\dot{u} - v + \mu^3(v - 2\eta)\sigma^3 = 0 && \mu\dot{v} + u - 2\mu^2(3\xi - 2\mu u)\sigma^3 = 0, \\ &\dot{\xi} - \eta - \frac{2}{3}(v - 2\eta)\sigma^3 = 0, && \dot{\eta} - \mu(3\xi - 2\mu u)\sigma^3 = 0, \\ &\dot{\sigma} + \big(3\xi(3\eta - 2v) + \mu u(3v - 4\eta)\big)\sigma^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

Положив в (3.3.38) $\mu = 0$, получим укороченную систему, которая имеет очевидное однопараметрическое семейство частных решений

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \xi = \xi_0 t, \quad \eta = \eta_0, \quad \sigma = \sigma_0 t^{-1},$$

где

$$u_0 = v_0 = 0, \quad \xi_0 = \eta - 0 = c, \quad \sigma_0 = \frac{|c|}{3},$$

$c \in \mathbb{R}$ — параметр семейства.

Следовательно, система уравнений (3.3.37) имеет однопараметрическое семейство частных решений с асимптотикой

$$\begin{aligned} &u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\ln t)t^{-k} && v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\ln t)t^{-k}, \\ &\xi(t) = t\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\ln t)t^{-k}, && \eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(\ln t)t^{-k}, \\ &\sigma(t) = t^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(\ln t)t^{-k}. \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Из (3.3.39) при помощи замены, обратной к (3.3.36), получим, что исходная система уравнений (1.4.7) имеет однопараметрическое семейство частных решений с асимптотикой

$$\begin{aligned} p_x(t) &= t\sum_{k=0}^{\infty} p_{x_k}(\ln t)t^{-k} \qquad & x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\ln t)t^{-k}, \\ p_y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{y_k}(\ln t)t^{-k}, \qquad & y(t) &= t\sum_{k=0}^{\infty} y_k(\ln t)t^{-k}, \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

где

$$p_{x_0} = 3c, \quad x_0 = 2c, \quad p_{y_0} = -c, \quad y_0 = -3c.$$

Анализ, проведенный в работе [191], показывает, что логарифмы в асимптотиках (3.3.40) «неубиваемы». Решения с асимптотиками (3.3.40) соответствуют так называемым неосциллирующим траекториям задачи Хилла, имеющим в конфигурационном пространстве асимптоту, параллельную оси Oy при $t \to +\infty$. Вопросы качественного поведения этих траекторий детально изучены в [191].

Глава 4

Проблема обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия и другие родственные задачи

1. Об энергетических критериях устойчивости

В этой главе мы рассмотрим задачи, для решения которых и разрабатывался первоначально излагаемый метод, как метод доказательства неустойчивости в случаях, когда эту неустойчивость невозможно установить, используя лишь линеаризованные уравнения. Первый параграф будет носить, в основном, вводный характер. Здесь мы очертим круг решаемых задач и сформулируем ряд теорем об устойчивости, к которым в последующих параграфах будут приведены обратные утверждения, доказательство которых основано на построении асимптотических решений. В этих теоремах главным условием устойчивости будет наличие изолированного минимума некоторой функции, играющей роль потенциальной энергии системы.

Итак, рассмотрим сперва каноническую систему уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{y}} = -d_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad (4.1.1)$$

описывающую движение механической системы с полной энергией

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K(\mathbf{x},\mathbf{y}) + U(\mathbf{x}),$$

где $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{K}(\mathbf{x}),\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$ — кинетическая энергия системы, а $U(\mathbf{x})$ — потенциальная, под действием «возмущающей» обобщенной силы $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — одно из положений равновесия системы, т. е.

$$dU(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0},$$

и без ограничения общности будем считать, что $U(\mathbf{0}) = 0$.

Предположим, что сила $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ линейна по обобщенным импульсам: $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{y}$. Пусть система уравнений (4.1.1) аналитична, т. е. функция $U(\mathbf{x})$, а также компоненты матриц $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ являются аналитическими функциями в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Можно считать, что система координат $\{\mathbf{x}\}$ в $\mathbb{R}^n$ является *нормальной*, т. е. $\mathbf{K}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$, а матрица $d^2U(\mathbf{0})$ диагональна.

Поскольку в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ матрица $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ невырождена, обобщенную силу $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x})$.

Матрицу $\mathbf{B}$ представим в виде суммы симметрической и кососимметрической составляющей:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\big(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{x})\big),$$
$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}^T(\mathbf{x})\big),$$

где $(\cdot)^T$ означает транспонирование.

Пусть система не имеет внешних источников энергии. Это означает, что при любом $\mathbf{x}$ собственные числа матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ неотрицательны. Действительно, при этом

$$\dot{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\big\langle \mathbf{D}(\mathbf{x})d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y}), d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y})\big\rangle \leqslant 0,$$

и энергия не возрастает на действительных движениях системы.

Матрицу $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ называют матрицей *диссипативных сил*, а матрицу $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})$ — матрицей *гироскопических сил*. Если при этом $\det\big(\mathbf{D}(\mathbf{x})\big) \neq 0$ в некоторой окрестности равновесия, то говорят, что на систему действуют диссипативные силы *с полной диссипацией*. Если гироскопические силы отсутствуют, то

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -d_{\dot{\mathbf{x}}}D(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

где

$$D(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle$$

— так называемая *диссипативная функция Релея*.

Очевидно, что гироскопические силы не совершают работы. Обычно на матрицу гироскопических сил накладывают дополнительные требования, а именно, дифференциальная 2-форма

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i<j}^{n} \omega_{ij}(\mathbf{x})\, dx^i \wedge dx^j,$$

где $\omega_{ij}(\mathbf{x})$, $i, j = 1, 2, \ldots$ — компоненты матрицы $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$, должна быть замкнута (см., например, [63]), т. е.

$$d\omega = 0.$$

Однако, в дальнейшем мы этим свойством пользоваться не будем.

Рассмотрим сначала классическую ситуацию, когда гироскопические и диссипативные силы отсутствуют (система (4.1.1) обратима).

Теорема 4.1.1 (теорема Лагранжа). *Пусть* $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv 0$ *и* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *— точка строгого локального минимума потенциальной энергии* $U(\mathbf{x})$*. Тогда тривиальное решение системы* (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *устойчиво по Ляпунову.*

На интуитивном физическом уровне кажется верным следующее утверждение: если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ не является точкой минимума $U(\mathbf{x})$, то рассматриваемое положение равновесия неустойчиво. В рассматриваемом аналитическом случае это действительно так, однако, с *математической* точки зрения это утверждение отнюдь не тривиально и в полном объеме было доказано совсем недавно [178]. С другой стороны, существуют контрпримеры, показывающие, что это утверждение неверно уже для бесконечно-дифференцируемых потенциалов [108, 176, 179]. Для подробного знакомства с проблемой обращения теоремы Лагранжа можно порекомендовать монографию [98], а также обзоры [51, 97, 186].

Если же диссипативные и гироскопические силы не равны нулю, то имеет место следующее утверждение, восходящее к Кельвину.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *— точка строгого локального минимума потенциальной энергии* $U(\mathbf{x})$*. Тогда тривиальное решение системы* (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *устойчиво по Ляпунову.*

Для доказательства теорем 4.1.1 и 4.1.2 достаточно применить теорему Ляпунова об устойчивости [81], в качестве функции Ляпунова использовав функцию Гамильтона $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Если диссипативные силы отсутствуют, то к теореме 4.1.2 сводится другая известная теорема аналитической механики — теорема Рауса об устойчивости стационарных движений.

Теорема 4.1.1 является, конечно, простым частным случаем теоремы 4.1.2, однако, мы сознательно разделили эти два утверждения, поскольку теорема 4.1.2 в отличие от предшествующей *не допускает* обращения даже для аналитического случая. Уже для линейных систем при отсутствии диссипативных сил возможно явление *гироскопической стабилизации* [132]. При попытке обратить это утверждение доставляют неприятности также диссипативные силы с неполной диссипацией. Однако, наличие диссипативных сил с *полной* диссипацией, наоборот, упрощает ситуацию.

Теорема 4.1.3. [187] *Пусть положение равновесия системы* (4.1.1) *изолировано, т. е. существует* $\varepsilon > 0$*, такое что*

$$dU(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \textit{для любого} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \|\mathbf{x}\| < \varepsilon,$$

а диссипация является полной:

$$\begin{gathered}\big\langle \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}), d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y})\big\rangle \leqslant -C\|d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x},\mathbf{y})\|^2 \\ \textit{для любых} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad 0 < \|\mathbf{x}\| < \varepsilon,\end{gathered}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. *Если* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — *точка минимума потенциальной энергии* $U(\mathbf{x})$*, решение системы* (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ **асимптотически** *устойчиво по Ляпунову.*

Утверждение, сформулированное в этой теореме, легко обращается: если $U(\mathbf{x})$ не имеет минимума в начале координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то при выполнении требований изолированности положения равновесия и полноты диссипации имеет место неустойчивость [187]. И прямое, и обратное утверждения доказываются при помощи теорем Красовского [73], где в качестве вспомогательной функции используется функция Гамильтона $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

К рассматриваемому кругу проблем тесно примыкает задача об устойчивости особых точек так называемых *градиентных систем*. Пусть непотенциальные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ не равны нулю, и, более того, $\det(\mathbf{B}(\mathbf{x})) \neq 0$. Система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\, dU(\mathbf{x}) \tag{4.1.2}$$

называется *обобщенно-градиентной*.

Если $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{D}(\mathbf{x})$, то (4.1.2) называется *градиентной* или *эволюционной*. С другой стороны, если $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$, и форма $\omega(\mathbf{x})$ замкнута, то (4.1.2) является гамильтоновой относительно симплектической структуры в $\mathbb{R}^n$, порожденной формой $\omega(\mathbf{x})$. В этом случае размерность пространства n должна быть, разумеется, четной.

Градиентные системы были рассмотрены впервые, по-видимому, Ляпуновым в связи с анализом устойчивости особых точек систем дифференциальных уравнений [81]. Они изучались затем Смейлом в теории структурной устойчивости [190], а также Томом и его последователями в теории катастроф [35].

Пользуясь соображениями, близкими к изложенным в [35], (4.1.2) можно рассматривать как предельный случай системы (4.1.1) при «малых» потенциальных силах.

Наряду с системой (4.1.2) рассмотрим также обратимую гамильтонову систему

$$\dot{\mathbf{y}} = -d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{4.1.3}$$

полученную из (4.1.1) путем отбрасывания непотенциальных сил.

Система (4.1.3) является также предельным случаем (4.1.1), но при «больших» потенциальных силах.

Поясним приведенные высказывания. Пусть гамильтониан рассматриваемой системы зависит дополнительно от скалярного параметра $c > 0$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, c) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + cU(\mathbf{x}).$$

Произведя в системе (4.1.1) замену

$$\mathbf{y} \mapsto c\mathbf{y}, \quad t \mapsto c^{-1} t,$$

и переходя к пределу при $c \to 0$, получим систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\mathbf{0} = -dU(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

эквивалентную (4.1.2).

С другой стороны, после замены

$$\mathbf{y} \mapsto \sqrt{c}\mathbf{y}, \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{c}}$$

и перехода к пределу при $c \to +\infty$, система (4.1.1) перейдет в (4.1.3).

Таким образом, система с непотенциальными силами (4.1.1) занимает, в каком-то смысле, промежуточное положение между обратимой гамильтоновой системой (4.1.3) и обобщенно-градиентной системой (4.1.2). Конечно, эти предельные переходы являются чисто формальными, и вряд ли можно ожидать, что решения систем (4.1.1) и (4.1.2) или (4.1.1) и (4.1.3) будут близкими без наложения каких-либо дополнительных условий.

Сформулируем достаточные условия устойчивости равновесия системы (4.1.2).

Теорема 4.1.4. *Пусть* $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$, *и пусть для любых* $\mathbf{x}$ *из некоторой малой окрестности начала координат выполнена оценка*

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{x})\xi, \xi \rangle \geqslant C\|\xi\|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1.4}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* $\mathbf{x}$. *Если* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — *точка изолированного минимума функции* $U(\mathbf{x})$, *решение системы* (4.1.2) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Для доказательства можно применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости, а функцию $U(\mathbf{x})$ использовать в качестве функции Ляпунова [81]. Теорема 4.1.4 допускает обращение: при выполнении требования (4.1.4) и изолированности особой точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ отсутствие минимума функции U влечет за собой неустойчивость. Это утверждение вытекает из теоремы Ляпунова о неустойчивости [81], при этом функция $U(\mathbf{x})$ снова может быть использована в качестве функции Ляпунова.

Ситуация резко меняется, когда «диссипативная составляющая» матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ отсутствует, и мы имеем дело с гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega^{-1}(\mathbf{x})\, dU(\mathbf{x}). \tag{4.1.5}$$

Имеет место

Теорема 4.1.5. *Если* $U(\mathbf{x})$ — *знакоопределенная в окрестности* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *функция* (*т. е. имеет в этой точке либо строгий минимум, либо строгий максимум*), *то особая точка системы* (4.1.5) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *устойчива по Ляпунову.*

Это утверждение следует из теоремы Ляпунова об устойчивости, поскольку функция $U(\mathbf{x})$ является первым интегралом системы (4.1.5). Уже в классе линейных систем легко построить контрпример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

На западе весьма популярным является исследование устойчивости равновесия систем (4.1.1) *при постоянно действующих возмущениях* [185, 188] (*total stability*). Мы не будем давать здесь соответствующих определений, а следуя [185], приведем соответствующую интерпретацию. Пусть функция Гамильтона и непотенциальные силы в (4.1.1) зависят дополнительно от некоторого набора параметров. Обычно предполагается [188], что вектор параметров $\mathbf{c}$ принадлежит некоторому банахову пространству, но мы ограничимся рассмотрением конечномерной ситуации ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$). Пусть гамильтониан и непотенциальные силы аналитически зависят от $\mathbf{c}$ в некоторой окрестности начала координат $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, т. е. функция $U(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ и компоненты матриц $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ являются аналитическими функциями $\mathbf{x}, \mathbf{c}$

в некоторой окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Пусть изменение параметров не смещает положения равновесия, т. е. для любого $\mathbf{c}$

$$d_{\mathbf{x}} U(\mathbf{0}, \mathbf{c}) \equiv \mathbf{0}.$$

Снова без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{E}$.

В этой ситуации устойчивость, асимптотическая устойчивость или неустойчивость системы (4.1.1) при постоянно действующих возмущениях фактически эквивалентна устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости особой точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ расширенной системы

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{y}} = -d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}), \\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{2n+d}. \end{gathered} \tag{4.1.6}$$

Мы не будем приводить здесь формулировок теорем из работ [185, 188], поскольку рассмотрим более сложную задачу. Очевидно, что в процессе эволюции системы ее параметры сами могут изменяться со временем, причем естественно предположить, что скорость изменения параметров зависит как от значений самих параметров в данный момент времени, так и от значений фазовых переменных, т. е. вместо системы (4.1.6) мы рассмотрим более общую систему

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{y}} = -d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}), \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}), \\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) \end{gathered} \tag{4.1.7}$$

и предположим, что если начальные значения параметров нулевые, а система находится в равновесии, то параметры далее со временем не изменяются, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Оказывается, что заключение об устойчивости или неустойчивости равновесного решения системы (4.1.7) можно сделать, основываясь лишь на наличии минимума первой нетривиальной формы разложения потенциальной энергии при нулевых значениях параметров.

Имеет место

Теорема 4.1.6. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ *и для любых* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$

$$\big\langle \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{0})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \big\rangle \geqslant C_1 \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \quad C_1 > 0, \tag{4.1.8}$$

2) *пусть* $\Lambda = d_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ *и для любых* $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$

$$\langle \Lambda \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle \leqslant -C_2 \|\boldsymbol{\eta}\|^2, \quad C_2 > 0. \tag{4.1.9}$$

Рассмотрим разложение потенциальной энергии $U(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ *в ряд Маклорена в окрестности* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \sum_{m=M}^{\infty} U_m(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \quad M \geqslant 2,$$

(*т. е. несколько первых форм разложения могут оказаться тождественно равными нулю при любых* $\mathbf{c}$). *Тогда, если форма* $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ *имеет изолированный локальный минимум в точке* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, то положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *системы* (4.1.7) *является асимптотически устойчивым, если же, наоборот,* изолированная *критическая точка* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *функции* $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ *не является точкой ее локального минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Здесь мы отойдем от правил изложения материала, которых мы придерживались до сих пор в этом параграфе. Во-первых, мы не доказывали сформулированные утверждения, поскольку они либо содержались в той или иной монографии по теории устойчивости движения, либо были тривиальными следствиями известных теорем. Теорема 4.1.6 является новой, и потому мы приведем полностью ее доказательство. Во-вторых, мы не формулировали здесь строго до сего момента утверждения о *неустойчивости*, оставляя их рассмотрение до следующих параграфов. Однако, доказательство асимптотической устойчивости и неустойчивости в теореме 4.1.6 основано на единой технике. Поэтому было бы нелогично его разрывать. В § 3 мы дадим другое доказательство факта неустойчивости, основанное на наличии в системе асимптотических траекторий.

Доказательство теоремы 4.1.6. Рассмотрим сначала более простой случай $M = 2$. Система уравнений первого приближения имеет вид:

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}\mathbf{x} - (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{c} + \Lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x} + \Lambda_{\mathbf{y}}\mathbf{y}, \tag{4.1.10}$$

где $\Lambda_{\mathbf{x}}, \Lambda_{\mathbf{y}}$ — некоторые $d \times n$-матрицы, через $\mathbf{D}$, $\boldsymbol{\Omega}$ обозначены матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, а $\mathbf{A} = d^2U(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Характеристическое уравнение для системы (4.1.10) имеет вид:

$$\det\bigl(\lambda^2\mathbf{E}_n + \lambda(\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{A}\bigr)\det(\Lambda - \lambda\mathbf{E}_d) = 0,$$

где $\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_d$ — единичные матрицы порядков n и d соответственно.

Прежде всего заметим, что в силу свойства (4.1.9) все корни уравнения

$$\det(\Lambda - \lambda\mathbf{E}_d) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части.

Далее, первые две группы уравнений в (4.1.10) отделяются. Характеристическим уравнением получившейся системы является

$$\det\bigl(\lambda^2\mathbf{E}_n + \lambda(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{A}\bigr) = 0. \tag{4.1.11}$$

Поскольку по условиям теоремы $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — единственная критическая точка квадратичной формы

$$U_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle,$$

и диссипация полна (см. (4.1.8)), то по теореме Сальвадори [187] рассматриваемое положение равновесия линейной системы асимптотически устойчиво, если форма $U_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ положительно определена, и неустойчиво, если эта форма может принимать отрицательные значения. Но асимптотическая устойчивость в линейных системах может быть только экспоненциальной. Поэтому все корни (4.1.11) имеют отрицательные вещественные части, если $U_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ имеет в начале координат изолированный минимум. Неустойчивость же в линейной системе может порождаться либо корнем характеристического уравнения с положительной вещественной частью, либо кратным нулевым или чисто мнимым корнем. Пусть $\lambda = \pm i\theta$ — два чисто мнимых комплексно-сопряженных корня (4.1.11). Тогда существуют два действительных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \neq 0$, таких, что

$$-\theta^2\mathbf{a} - \theta(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega})\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad -\theta^2\mathbf{b} + \theta(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega})\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Домножая скалярно первое равенство на $\mathbf{b}$, а второе на $\mathbf{a}$, и вычитая первое из второго, получим

$$\theta\bigl(\langle \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{D}\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle\bigr) = 0,$$

откуда следует, что $\theta = 0$.

Однако, поскольку $\det \mathbf{A} \neq 0$, уравнение (4.1.11) нулевых корней не имеет, и неустойчивость может быть вызвана только наличием корня с положительной вещественной частью. Для завершения доказательства теоремы в случае $M = 2$ остается применить теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

Доказательство теоремы 4.1.6 для случая $M > 2$ основано на применении теоремы о центральном многообразии [85]. В этом случае характеристическое уравнение системы уравнений первого приближения (4.1.10) имеет $n + d$ корней с отрицательной вещественной частью и n нулевых. Обозначив $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ и сделав линейную замену

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma},$$

мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= -d_{\mathbf{x}}H(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma})+\mathbf{Q}(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}),\\
\dot{\mathbf{u}} &= d_{\mathbf{y}}H(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma})+\mathbf{B}^{-1}\big(d_{\mathbf{x}}H(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma})-\\
&\quad-\mathbf{Q}(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma})\big),\\
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v},\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}).
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Система первого приближения для (4.1.12) имеет теперь вид

$$\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{B}\mathbf{v},\quad \dot{\mathbf{u}}=\mathbf{0},\quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}+(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{v}.$$

Сделаем еще одну линейную замену переменных

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{v},\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{u},\quad \boldsymbol{\zeta}=\mathbf{u}.$$

Система (4.1.12) приобретет теперь вид

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\xi}} &= -d_{\mathbf{x}}H(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})+\\
&\quad+\mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}),\\
\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})+\\
&\quad\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\Big(d_{\mathbf{y}}H(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})+\\
&\quad+\mathbf{B}^{-1}\big(d_{\mathbf{x}}H(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})-\\
&\quad-\mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})\big)\Big),\\
\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= d_{\mathbf{y}}H(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})+\\
&\quad+\mathbf{B}^{-1}\big(d_{\mathbf{x}}H(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})-\\
&\quad-\mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})\big).
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Система первого приближения для (4.1.13) еще более упрощается

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\mathbf{B}\boldsymbol{\xi},\quad \dot{\boldsymbol{\eta}}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}+(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{B}^{-1})\boldsymbol{\xi},\quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}=\mathbf{0}.$$

Следовательно, к системе (4.1.13) можно применить теорему о центральном многообразии [85]. Это многообразие будет «настоящим», а не формальным, как в теореме 3.1.1 (хотя может иметь лишь конечную гладкость), поскольку все ненулевые корни системы первого приближения будут иметь отрицательные действительные части. Более того, это многообразие будет экспоненциально притягивающим. Переменные $\boldsymbol{\zeta}$ являются критическими, поэтому центральное многообразие будет иметь вид

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta}),\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\zeta}),$$

где вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\zeta})$ могут быть разложены в формальные ряды Маклорена в окрестности точки $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, причем $d\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $d\boldsymbol{\psi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Редуцированная на центральное многообразие система имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\zeta})$$

причем матрица $d\mathbf{Z}(\mathbf{0})$ нильпотентна.

Вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\zeta})$ удовлетворяют достаточно сложной системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Выпишем ту ее часть, в которую входят частные производные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta})$:

$$\begin{aligned}
&- d_{\mathbf{x}} H(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}) + \\
&+ \mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}) = \\
&= d\boldsymbol{\varphi}\Big\{ d_{\mathbf{y}} H(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}) + \\
&+ \mathbf{B}^{-1}\big(d_{\mathbf{x}} H(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}) - \\
&- \mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta})\big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Из уравнений (4.1.14) видно, что разложение $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta})$ в формальный ряд Маклорена начинается с членов $(M-1)$-го порядка. Более того, уравнение для определения формы $\boldsymbol{\varphi}_{M-1}(\boldsymbol{\zeta})$ имеет вид

$$-d_{\zeta} U_M(\zeta, 0) + \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}_{M-1}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}.$$

Вычисляя первые нетривиальные формы разложения векторного поля $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\zeta})$ в ряд Маклорена в окрестности $\boldsymbol{\zeta} = 0$ и подставляя в последнюю группу уравнений (4.1.13) $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta})$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\zeta})$, мы найдем, что это векторное поле является «почти» обобщенно-градиентным:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{B}^{-1} d_{\zeta} U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0}) + \widetilde{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\zeta}) \tag{4.1.15}$$

$\widetilde{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\zeta}) = o\big(\|\boldsymbol{\zeta}\|^{M-1}\big)$ при $\boldsymbol{\zeta} \to 0$.

Поскольку инвариантное центральное многообразие является притягивающим, то асимптотическая устойчивость (неустойчивость) исходной системы эквивалентна асимптотической устойчивости (неустойчивости) системы (4.1.15). Если $\widetilde{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \mathbf{0}$, то необходимые утверждения вытекают из асимптотической устойчивости (неустойчивости) модельной системы

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{B}^{-1}\, d_{\zeta} U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0}). \tag{4.1.16}$$

Вопрос состоит в том, являются ли свойства асимптотической устойчивости и неустойчивости для системы (4.1.16) грубыми? Как следует из общей теории [125], свойство асимптотической устойчивости для малых возмущений однородных систем действительно является грубым, а неустойчивость является грубым свойством, если в укороченной системе она порождается наличием прямолинейного растущего решения типа луча. В рассматриваемом случае ситуация еще проще, поскольку модельная система (4.1.16) является обобщенно-градиентной, и функция Ляпунова для нее, а следовательно, и для полной системы (4.1.15), выписывается в явном виде. Поскольку $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ — изолированная критическая точка формы $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$, то

$$\|d_{zt}U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})\| \geqslant \mathbf{C_3}\|\zeta\|^{\mathbf{M-1}}, \quad \mathbf{C_3} > \mathbf{0}.$$

Оценим производную по времени от функции $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$ в силу системы (4.1.15):

$$\begin{gathered} U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0}) = \langle d_\zeta U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0}), \mathbf{B}^{-1} d_\zeta U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0}) + \widetilde{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\zeta})\rangle \geqslant \\ \geqslant C_4\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2M-2} + o(\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2M-2}), \quad C_4 > 0. \end{gathered}$$

Поэтому в малой окрестности $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ функция $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$ является положительно определенной. Итак, форма $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$ может быть использована в качестве функции Ляпунова системы (4.1.15). Эта система асимптотически устойчива, если $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$ имеет изолированный минимум, и неустойчива, если $U_M(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{0})$ не имеет локального минимума в точке $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, что влечет за собой асимптотическую устойчивость (соответственно неустойчивость) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ системы (4.1.7).

Теорема доказана.

Условиям только что доказанной теоремы можно дать следующую интерпретацию. Система (4.1.7) состоит из двух связанных друг с другом систем, одна из которых описывает изменение фазовых переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а другая — изменение вектора параметров $\mathbf{c}$. Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы первая подсистема была бы асимптотически устойчива при фиксированных значениях параметра $\mathbf{c}$, мало отличающихся от $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Если зафиксировать некоторые ненулевые малые значения фазовых переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то, применяя теорему о неявной функции, можно показать, что положение равновесия $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ второй подсистемы не исчезнет, а «сдвинется» и останется асимптотически устойчивым. Эти свойства являются грубыми в том смысле, что простая устойчивость несвязанных систем при фиксированных значениях параметров или фазовых переменных *не гарантирует* устойчивости связанной системы. Покажем это на простом примере.

Пример 4.1.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{y} = -\omega^2(1 + c_1)x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{c}_1 = -c_2, \quad \dot{c}_2 = c_1, \quad \omega \neq 0. \qquad (4.1.17)$$

Положение равновесия $x = y = 0$ гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H(x, y, c_1, c_2) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 + c_1)\frac{x^2}{2}$$

устойчиво при любых значениях параметров $-1 < c_1 < +\infty$, $-\infty < c_2 < +\infty$, положение равновесия $c_1 = c_2$ системы

$$\dot{c}_1 = -c_2, \quad \dot{c}_2 = c_2,$$

описывающей изменение параметров, также устойчиво.

Однако, при $\omega = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ положение равновесия $x = y = c_1 = c_2 = 0$ системы (4.1.17) неустойчиво. Действительно, (4.1.17) можно переписать в виде скалярного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2\big(1 + \varepsilon\cos(t - t_0)\big)x = 0$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{c_1^2(t_0) + c_2^2(t_0)}.$$

В этом уравнении при значениях частот, близких к полуцелым числам, имеет место явление параметрического резонанса [16], что приводит к неустойчивости.

Условия теоремы 4.1.6 вообще нельзя, по-видимому, существенно ослабить. В частности, условия этой теоремы требуют, чтобы наличие или отсутствие минимума потенциальной энергии $U(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ распознавалось бы уже по *первой* нетривиальной форме разложения. Это требование кажется достаточно жестким, однако, в рассматриваемой ситуации оно по существу. Дело в том, что асимптотическая устойчивость или неустойчивость исследуемой системы (4.1.7) определяется асимптотической устойчивостью или неустойчивостью системы, редуцированной на центральное многообразие. Эта система является обобщенно-градиентной лишь в первом нетривиальном приближении. Если асимптотическую устойчивость или неустойчивость в этом приближении установить не удается, то на структуру следующих членов существенное влияние может оказать уже группа уравнений, описывающих изменение параметров, и в этом случае *энергетический* критерий устойчивости вряд ли будет иметь место.

Рассмотрим, наконец, движение консервативной системы, стесненной $d < n$ дополнительными *неголономными связями*

$$\big\langle \mathbf{w}^p(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \big\rangle = \sum_{j=1}^{n} w_j^p(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}^j = 0, \quad p = 1, \ldots, d. \tag{4.1.18}$$

Рассмотрим $n \times d$-матрицу $\mathbf{W}(\mathbf{x})$, по столбцам которой стоят ковекторы неголономных связей $\mathbf{w}^1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{w}^d(\mathbf{x})$. Уравнения связей (4.1.18) тогда можно записать в векторно-матричном виде

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

или

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{y})\, d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \tag{4.1.19}$$

Будем считать, что компоненты матрицы $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ аналитичны в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Движение такой механической системы описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{y}} = -d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}, \quad \dot{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \mathbf{W}^T(\mathbf{x})\, d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{4.1.20}$$

где ковектор $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ — набор неопределенных множителей Лагранжа.

Пусть, как и ранее, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — критическая точка потенциальной энергии $U(\mathbf{x})$. Тогда тройка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ — равновесное решение системы (4.1.20). Вообще говоря, не только критические точки потенциальной энергии $U(\mathbf{x})$ являются положениями равновесия: уравнения для нахождения положений равновесия системы имеют вид

$$-dU(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Положения равновесия, определяемые критическими точками потенциальной энергии (при $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$), называются *положениями равновесия первого* рода, в то время как остальные (здесь $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$) называются *положениями равновесия второго рода*. Если $\det\big(d^2U(\mathbf{0})\big) \neq 0$, и матрица $\mathbf{W}(\mathbf{0})$ имеет максимальный ранг, то положение равновесия первого рода $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ лежит на гладкой регулярной d-мерной поверхности, состоящей из положений равновесия системы. Все равновесия из малой проколотой окрестности нуля являются равновесиями второго рода [57]. Дальнейшие сведения, касающиеся геометрии равновесий неголономных систем, можно почерпнуть из цитированной работы [57].

К равновесиям второго рода никакие энергетические критерии устойчивости в общем случае неприменимы, поэтому мы остановимся только на равновесиях первого рода.

Для начала заметим, что если в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ матрица $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ имеет максимальный ранг, то при помощи исключения неопределенных множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ уравнения (4.1.20) могут быть снова приведены к виду (4.1.1), где непотенциальная сила $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{W}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}$ удерживает систему на связях, если только начальные условия удовлетворяют уравнениям связей. Это означает, что действительные движения системы лежат на инвариантном многообразии, задаваемом (4.1.19).

Действительно, продифференцировав по времени (4.1.19) и подставив в получившиеся соотношения первую и вторую группу уравнений системы (4.1.20), получим

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{x})\, d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{4.1.21}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\boldsymbol{\Gamma}\big(\mathbf{x}, d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) + \\ + \mathbf{W}^T(\mathbf{x})\big(d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d^2_{\mathbf{yx}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big),\end{aligned}$$

а $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \cdot)$ — квадратичное по второму аргументу отображение, коэффициентами которого являются частные производные компонент матрицы $\mathbf{W}^T(\mathbf{x})$.

Поскольку гессиан $d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{K}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$, то

$$\det\big(\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x})\big) \neq 0$$

в некоторой малой окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (матрица $\mathbf{W}^T(\mathbf{0})\mathbf{W}(\mathbf{0})$ является матрицей Грама линейно независимой системы векторов $\mathbf{w}^1(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{w}^d(\mathbf{0})$ [34, 130]). Поэтому система уравнений (4.1.21) разрешима относительно множителей Лагранжа λ.

Подставляя λ в первую группу уравнений (4.1.20), получим систему вида (4.1.1). Сила $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ уже не будет линейной по $\mathbf{y}$. Заметим еще, что на инвариантном многообразии, задаваемом уравнениями связей, эта сила является *неэнергетической*, т. е. из (4.1.19), (4.1.20) следует, что

$$\dot{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \big\langle \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \big\rangle = \big\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{W}^T(\mathbf{x}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \big\rangle = 0.$$

Это обстоятельство показывает, что для рассматриваемой системы должен существовать энергетический критерий устойчивости.

Точнее, имеет место

Теорема 4.1.7. [96] *Пусть* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — *точка строгого локального минимума потенциальной энергии* $U(\mathbf{x})$*. Тогда тривиальное решение системы* (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$*, где непотенциальная сила* $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *порождена связями* (4.1.19)*, устойчиво по Ляпунову на инвариантном многообразии, задаваемом уравнениями связей.*

Данная теорема доказывается при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости, которая носит здесь условный характер: устойчивость имеет место для решений с начальными условиями, подчиняющимися уравнениям связей.

Теорема 4.1.7 в общем случае обращения не допускает. Легко привести пример системы, потенциальная энергия которой не имеет минимума в положении равновесия, и поэтому это положение равновесия неустойчиво в соответствии с уже цитировавшейся теоремой В. П. Паламодова [178], но это положение равновесия может стать устойчивым после наложения на систему специальным образом подобранной *голономной* связи [132] (для этого, например, должна быть равна единице степень неустойчивости исходной системы). До сих пор неизвестно, можно ли застабилизировать неустойчивое положение равновесия при помощи наложения *неголономной* связи. Проблема состоит в том, что при наложении голономной связи размерность фазового пространства уменьшается фактически на две единицы, в то время как при наложении неголономной связи происходит падение размерности лишь на единицу (на самом деле, если связь записана в дифференциальной форме, и в голономном случае получающееся фазовое пространство имеет коразмерность один, однако, оно может быть расслоено на инвариантные многообразия коразмерности два, лишь на одном из которых находится исследуемое положение равновесия). Это обстоятельство приводит к появлению нулевого корня характеристического уравнения системы первого приближения. Мы приведем один пример, весьма далекий от общности, но показывающий, что и в неголономном случае стабилизация все же возможна. На этом же примере мы продемонстрируем, что при наложении неголономной связи, обеспечивающей стабилизацию в первом приближении, при соответствующем выборе параметров системы может иметь место неустойчивость в нелинейном приближении.

Пример 4.1.2. Рассмотрим движение механической системы с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \omega^2 x^2 - \Omega^2 y^2 + a^2 z^2),$$

движение которой стеснено неголономной связью

$$\dot{z} + x\dot{y} = 0.$$

Движение этой системы можно описать уравнениями Воронца [91]

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \omega^2 x = 0,\\
&\ddot{y} + \frac{x\dot{x}}{1+x^2}\dot{y} + \Omega^2\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)y + \frac{a^2 x}{1+x^2}z = 0,\\
&\dot{z} + x\dot{y} = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Система (4.1.22) обладает двумя замечательными свойствами: во-первых, она линейна относительно $y, \dot{y}, z$, во-вторых, первое уравнение, описывающее изменение переменной x, отщепляется и легко интегрируется. Поэтому (4.1.22) после замены

$$u = y + \Omega^{-1}\dot{y}, \quad v = y - \Omega^{-1}\dot{y}$$

примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{u} = -\Omega v + \varepsilon f_3(\varepsilon, t)z + \varepsilon^2\big(f_1(\varepsilon, t)u + f_2(\varepsilon, t)v\big),\\
&\dot{v} = \Omega u - \varepsilon f_3(\varepsilon, t)z - \varepsilon^2\big(f_1(\varepsilon, t)u + f_2(\varepsilon, t)v\big),\\
&\dot{z} = \varepsilon f_4(\varepsilon, t)(u - v).
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Здесь функции f_1, f_2, f_3, f_4 $\frac{2\pi}{\omega}$-периодичны по времени t и могут быть разложены в степенные ряды по ε с ненулевыми свободными членами. Приведем точные формулы:

$$f_1(\varepsilon, t) = -\frac{1}{2}\big(\xi(t)\xi(t) + \Omega\xi^2(t)\big)\big(1 + \varepsilon^2\xi^2(t)\big)^{-1},$$

$$f_2(\varepsilon, t) = -\frac{1}{2}\big(\Omega\xi^2(t) - \xi(t)\xi(t)\big)\big(1 + \varepsilon^2\xi^2(t)\big)^{-1},$$

$$f_3(\varepsilon, t) = -\Omega^{-1}a^2\xi(t)\big(1 + \varepsilon^2\xi^2(t)\big)^{-1}, \quad f_4(\varepsilon, t) = -\frac{\Omega}{2}\xi(t).$$

В (4.1.23) учтено, что находящиеся вблизи положения равновесия решения первого уравнения из (4.1.22) имеют вид $x(t) = \varepsilon\xi(t)$, где $\xi(t) = \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Для дальнейшего нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1.1. *Рассмотрим квазиавтономную линейную систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\varepsilon, t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \tag{4.1.24}$$

где компоненты матрицы $\mathbf{A}(\varepsilon, t)$ $\frac{2\pi}{\omega}$*-периодичны по* t *и аналитичны по* ε, t *на множестве* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times S^1$ *при* $\varepsilon_0 > 0$ *достаточно малом.*

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *— собственные числа постоянной матрицы* $\mathbf{A}_0 \equiv \equiv \mathbf{A}(0, t)$*, и предположим, что эта матрица диагонализируема. Пусть, далее, для любых значений индексов* $j, l = 1, \ldots, N$ *и* $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *отсутствуют резонансы вида*

$$\lambda_j - \lambda_l = ip\omega. \tag{4.1.25}$$

Тогда существует формальное линейное преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\varepsilon, t)\mathbf{y},$$

где компоненты матрицы $\mathbf{B}(\varepsilon, t)$ *разложимы в формальные степенные ряды*

$$\mathbf{B}(\varepsilon, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k(t)\varepsilon^k$$

с $\frac{2\pi}{\omega}$*-периодическими коэффициентами, приводящее систему* (4.1.24) *к автономному виду*

$$\dot{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{A}}(\varepsilon)\mathbf{y}, \tag{4.1.26}$$

где матрица $\mathbf{A}(\varepsilon)$ *раскладывается в формальный степенной по* ε *ряд*

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\mathbf{A}}_k \varepsilon^k$$

причем $\widetilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0$.

Замечание 4.1.1. Для того, чтобы указанное преобразование было аналитичным, необходимо потребовать не только отсутствия резонансов вида (4.1.25), но н выполнения некоторых диофантовых условий. Однако мы остановимся здесь лишь на формальном аспекте проблемы, оставляя вопрос о сходимости построенного преобразования за рамками нашего исследования.

Доказательство леммы 4.1.1. Матрица $\mathbf{B}(\varepsilon, t)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\dot{\mathbf{B}}(\varepsilon, t) = \mathbf{A}(\varepsilon, t)\mathbf{B}(\varepsilon, t) - \mathbf{B}(\varepsilon, t)\widetilde{\mathbf{A}}(\varepsilon).$$

В этом уравнении приравняем члены с одинаковыми степенями ε. Для этого исходную матрицу $\mathbf{A}(\varepsilon, t)$ также разложим в степенной ряд

$$\mathbf{A}(\varepsilon, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)\varepsilon^k.$$

Очевидно следует положить $\mathbf{B}_0(\varepsilon, t) \equiv \mathbf{E}$. Приравнивая члены при ε^k, $k = 1, 2, \ldots$, получим цепочку матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{B}}_k(t) = \mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}\mathbf{B}_k(t) + \mathbf{A}_k(t) - \widetilde{\mathbf{A}}_k + \mathbf{\Phi}_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.1.27}$$

где

$$\mathbf{\Phi}_k(t) = \sum_{s=1}^{k-1} \left(\mathbf{A}_s(t)\mathbf{B}_{k-s}(t) - \mathbf{B}_s(t)\widetilde{\mathbf{A}}_{k-s}\right),$$

а также введено обозначение для коммутатора матриц

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}\mathbf{B} = \mathbf{A}_0\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_0.$$

Если $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_{k-1}(t)$, $\widetilde{\mathbf{A}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{A}}_{k-1}$ найдены, то $\mathbf{\Phi}_k(t)$ — известная матрица с $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическими компонентами.

Рассмотрим разложения Фурье

$$\mathbf{A}_k(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{kp}e^{ip\omega t}, \quad \mathbf{B}_k(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_{kp}e^{ip\omega t},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Phi}_{kp}e^{ip\omega t}.$$

Подставляя эти разложения в (4.1.27) и приравнивая члены при соответствующих Фурье-гармониках, получим

$$i\omega p\mathbf{B}_{kp} = \mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}\mathbf{B}_{kp} + \mathbf{\Phi}_{kp} + \mathbf{A}_{kp} - \delta_{p0}\widetilde{\mathbf{A}}_k, \tag{4.1.28}$$

где δ_{p0} — символ Кронекера.

Лемма 4.1.2. *Рассмотрим N^2-мерное пространство $N \times N$-матриц $\mathbf{B}$ и линейный оператор $\mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}$ на этом пространстве. Собственные значения этого оператора равны*

$$\lambda_j - \lambda_l, \quad j, l = 1, \ldots, N$$

Доказательство. Пусть матрица $\mathbf{A}_0$ приведена к диагональному виду $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Тогда матрицы $\mathbf{B}^{jl}$, у которых на пересечении j-й строки и l-го столбца стоит единица, а остальные элементы являются нулями, образуют собственный базис в рассматриваемом пространстве. Легко видеть также, что собственные числа оператора $\mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}$ имеют требуемый вид.

Лемма доказана.

Поскольку по условиям леммы 4.1.1 резонансы вида (4.1.25) отсутствуют, то в силу леммы 4.1.2 равенство (4.1.28) при $p \neq 0$ разрешается следующим образом:

$$\mathbf{B}_{kp} = \big(i\omega p\mathbf{E} - \mathbf{L}_{\mathbf{A}_0}\big)^{-1}(\mathbf{\Phi}_{kp} + \mathbf{A}_{kp}).$$

При $p = 0$ можно положить

$$\mathbf{B}_{k0} = \mathbf{0}, \quad \widetilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{\Phi}_{k0} + \mathbf{A}_{k0}.$$

Таким образом, формальное преобразование, осуществляющее переход от системы (4.1.24) к автономной системе (4.1.26), построено.

Лемма 4.1.1 доказана.

Для рассматриваемой системы (4.1.23) резонансы (4.1.25) будут иметь вид

$$\Omega = \frac{\omega p}{2}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{4.1.29}$$

Отсутствие резонансов (4.1.29) означает отсутствие в системе *параметрического* резонанса. В этом случае система уравнений (4.1.23) при помощи формальной линейной $\frac{2\pi}{\omega}$-периодической замены $(u, v, z) \mapsto (U, V, Z)$ приводится к автономному виду. Более того, без ограничения общности можно считать, что полученная автономная система приведена к блочному виду

$$\dot{U} = \alpha(\varepsilon)U - \Omega(\varepsilon)V, \quad \dot{V} = \Omega(\varepsilon)U + \beta(\varepsilon)V, \quad \dot{Z} = \lambda(\varepsilon)Z, \tag{4.1.30}$$

где

$$\Omega(0) = \Omega, \quad \alpha(0) = \beta(0) = \lambda(0) = 0.$$

Действительно, невозмущенная система имеет два чисто мнимых корня характеристического уравнения и один нулевой, поэтому возмущенная система теоретически может иметь два комплексно сопряженных корня (возможно с нулевыми действительными частями) и один действительный.

Лемма 4.1.3. *В системе* (4.1.30) $\lambda(\varepsilon) \equiv 0$, $\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) \equiv 0$.

Доказательство. Поскольку исходная механическая система имела интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2 + \Omega^2 y^2 - a^2 z^2),$$

то система уравнений (4.1.23) имеет неавтономный квадратичный интеграл

$$G = \Omega^2 \Big(\big(1 + \varepsilon^2 \xi^2(t)\big)(u - v)^2 + (u + v)^2 \Big) - 4a^2 z^2,$$

который после приведения системы к автономному виду (4.1.30) запишется как

$$\begin{gathered} G = A(\varepsilon, t)U^2 + B(\varepsilon, t)V^2 + C(\varepsilon, t)Z^2 + \\ +2D(\varepsilon, t)UV + 2E(\varepsilon, t)UZ + 2F(\varepsilon, t)VZ, \end{gathered}$$

где A, B, C, D, E, F — $\frac{2\pi}{\omega}$-периодические функции, раскладывающиеся в формальные степенные ряды относительно параметра ε, причем

$$A(0, t) = B(0, t) = 2\Omega^2 \neq 0, \quad C(0, t) = -4a^2 \neq 0.$$

Поскольку G — интеграл (4.1.30), функция $C(\varepsilon, t)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{C}(\varepsilon, t) + 2\lambda(\varepsilon)C(\varepsilon, t) = 0$$

и быть, по крайней мере, ограниченной функцией времени.

Но это возможно лишь при $\lambda(\varepsilon) \equiv 0$ и $C(\varepsilon, t) \equiv \mathrm{const}$ (относительно времени t). С другой стороны, функции $A(\varepsilon, t), B(\varepsilon, t), D(\varepsilon, t)$ должны удовлетворять системе трех уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{A}(\varepsilon, t) + 2\alpha(\varepsilon)A(\varepsilon, t) + 2\Omega(\varepsilon)D(\varepsilon, t) = 0, \\ &\dot{B}(\varepsilon, t) - 2\Omega(\varepsilon)D(\varepsilon, t) + 2\beta(\varepsilon)B(\varepsilon, t) = 0, \\ &\dot{D}(\varepsilon, t) + \big(\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\big)D(\varepsilon, t) + \Omega(\varepsilon)\big(B(\varepsilon, t) - A(\varepsilon, t)\big) = 0, \end{aligned}$$

которая обладает ограниченным по времени t решением, только если один из корней характеристического уравнения этой системы нулевой, а два другие — чисто мнимые.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta(\rho) = \big(\rho + \big(\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\big)\big)\big(\rho^2 + 2\big(\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\big)\rho + 4\big(\Omega^2(\varepsilon) + \alpha(\varepsilon)\beta(\varepsilon)\big)\big) = 0.$$

Корни выписанного характеристического уравнения подчиняются указанным требованиям тогда и только тогда, когда $\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) \equiv 0$.

Лемма доказана.

Следовательно, при малых значениях ε характеристическое уравнение системы (4.1.30) имеет один нулевой корень и два чисто мнимых, что означает устойчивость. Таким образом, отсутствие в системе резонансов вида (4.1.29) гарантирует устойчивость, по крайней мере, на формальном уровне. Наличие нулевого корня характеристического уравнения системы (4.1.30) означает, что в пятимерном фазовом пространстве системы имеется одномерное многообразие положений равновесия, что согласуется с теорией, изложенной в [57], о существовании семейств равновесий второго рода. Траектории системы вокруг этих равновесий группируются в инвариантные торы, разрушению которых препятствует несоизмеримость частот Ω и ω, а также наличие квадратичного интеграла.

При изучении достаточных условий устойчивости в более общей ситуации, по-видимому, необходимо воспользоваться полученными недавно М. В. Матвеевым [86] результатами, распространяющими известную теорему Арнольда – Мозера об устойчивости положений равновесия двумерных гамильтоновых систем в общем эллиптическом случае [5, 88] на обратимые системы.

Итак, мы показали, что при помощи наложения неголономной связи можно застабилизировать неустойчивое положение равновесия. Следует отметить, что в работе [27] высказана гипотеза, что обращение теоремы 4.1.7 в частном случае так называемых систем Чаплыгина [91] все же возможно.

После всего сказанного становится очевидно, что наличие одного из резонансов (4.1.29) может повлечь за собой неустойчивость. Мы не будем анализировать здесь все резонансы вида (4.1.29), а покажем лишь, что неустойчивость имеет место на главном тоне ($p = 2$, $\Omega = \omega$), т. е. на второй частоте параметрического резонанса. Этот случай позволяет обнаружить неустойчивость уже в *первом асимптотическом* приближении. Два последних уравнения (4.1.22) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + \frac{\varepsilon^2 \xi \xi}{1 + \varepsilon^2 \xi^2}\dot{y} + \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{1 + \varepsilon^2 \xi^2}\right) y + \frac{\varepsilon a^2 \xi}{1 + \varepsilon^2 \xi^2} z = 0, \\ &\dot{z} + \varepsilon \xi \dot{y} = 0, \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

где $\xi = \cos\phi$, а $\phi = \omega t$ — фаза параметрического возбуждения.

Воспользуемся алгоритмом, близким к описанному в классической монографии по теории возмущений [16]. Решения системы (4.1.31) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$y = l\cos\psi + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(I, J, \phi, \theta)\varepsilon^k, \quad z = J + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(I, J, \phi, \theta)\varepsilon^k.$$

Здесь I, ψ — амплитуда и фаза нелинейных колебаний, $\theta = \psi - \phi$ — фазовая расстройка. Периодические с периодом 2π по последним двум аргументам ϕ, ψ функции Y_k, Z_k, $k = 1, 2, \ldots$ подберем таким образом, чтобы величины I, J, θ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(I, J, \theta)\varepsilon^k, \quad \dot{J} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I, J, \theta)\varepsilon^k, \quad \dot{\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(I, J, \theta)\varepsilon^k,$$

где функции A_k, B_k, C_k, $k = 1, 2, \ldots$ 2π-периодически зависят от θ.

Опуская детали, приведем формулы для функций, участвующих в построении первого приближения по ε:

$$A_1 = \frac{a^2 J\sin\theta}{2\omega}, \quad B_1 = \frac{\omega I\sin\theta}{2}, \quad C_1 = \frac{a^2 J\cos\theta}{2\omega I},$$

$$Y_1 = 0, \quad Z_1 = -\frac{l\cos(\theta + 2\phi)}{4}.$$

Переходя, наконец, от «полярных» координат I, ψ к «декартовым» η, ζ

$$\eta = I\cos\theta, \quad \zeta = I\sin\theta,$$

получим, что исходная система (4.1.31) примет следующий вид:

$$\dot{\eta} = O(\varepsilon^2), \quad \dot{\zeta} = \frac{\varepsilon a^2}{2\omega}J + O(\varepsilon^2), \quad \dot{J} = \frac{\varepsilon\omega}{2}\zeta + O(\varepsilon^2), \tag{4.1.32}$$

где явно выписаны лишь члены первого порядка малости по ε.

«Укороченная система», у которой отброшены все слагаемые в правой части, имеющие порядок малости по ε выше первого, является линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для этой системы имеет один нулевой корень (он отвечает одномерному многообразию положений равновесия, о котором говорилось раньше) и два действительных ненулевых корня разных знаков: $\pm\frac{\varepsilon a}{2}$. Наличие этих корней приводит к слабой (порядка ε) экспоненциальной неустойчивости положения равновесия системы (4.1.32), а следовательно, и к неустойчивости в исходной системе.

Вернемся к рассмотрению общей проблемы. Нетривиальная ситуация возникает, когда в положении равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ происходит падение ранга матрицы $\mathbf{W}(\mathbf{x})$. В этом случае систему (4.1.19) либо вообще нельзя привести к виду (4.1.10), либо непотенциальная сила $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет иметь сингулярность. При этом в положении равновесия (которое является положением равновесия первого рода!) множители Лагранжа λ могут зависеть от некоторых произвольных параметров. Для такого рода систем задача об устойчивости по Ляпунову вообще не имеет смысла, поскольку нарушаются условия теоремы существования и единственности решений в окрестности этого положения равновесия. Тем не менее, в следующем параграфе мы укажем достаточные условия *неустойчивости*, гарантирующие, что начинающееся в сколь угодно малой окрестности положения равновесия решение, покинет некоторую фиксированную окрестность этого равновесия за конечное время.

2. Регулярные задачи

Этот параграф посвящен анализу тех случаев обращения энергетических критериев устойчивости, сформулированных в предыдущем параграфе, которые сводятся к анализу положительно полуквазиоднородных в смысле «классического» определения (1.1.4) систем.

Начнем с изучения обобщенно-градиентных систем (4.1.2). Пусть

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{m=M} U_m(\mathbf{x}), \quad M \geqslant 2$$

— разложение потенциала в ряд Маклорена в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

В этом параграфе мы сосредоточимся на ситуации, когда разложение $U(\mathbf{x})$ начинается, по крайней мере, с формы *третьей* степени.

Рассмотрим сперва классический *градиентный* случай:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\, dU(\mathbf{x}), \tag{4.2.1}$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ — симметричная матрица, положительно определенная при всех значениях $\mathbf{x}$ из некоторой малой окрестности начала координат.

Имеет место

Теорема 4.2.1. [53] *Пусть первая нетривиальная форма $U_M(\mathbf{x})$ разложения потенциальной энергии в ряд Маклорена может принимать отрицательные значения. Тогда особая точка рассматриваемой системы* *неустойчива*: *имеется частное решение* (4.2.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to -\infty$, *причем существует конечный предел*

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} = \mathbf{e}, \tag{4.2.2}$$

где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ — *некоторый единичный вектор.*

Следует отметить, что существование асимптотической при $t \to -\infty$ траектории при условии, что потенциальная энергия не имеет минимума в рассматриваемой *изолированной* критической точке, следует из упоминавшейся во введении теоремы Н. Н. Красовского [73]. Более содержательным является здесь утверждение о существовании предела (4.2.2). Направление, задаваемое вектором $\mathbf{e}$, называют характеристическим. Рене Томом [35] было высказано предположение, что, если потенциал градиентной системы не имеет в изолированной критической точке локального минимума, то существует асимптотическое решение с характеристическим направлением. Эта гипотеза в полном объеме пока не доказана.

Доказательство теоремы 4.2.1. Систему координат, в которых записана система (4.2.1), можно выбрать так, что $\mathbf{D}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$. Рассмотрим стандартную шкалу однородных растяжений в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbf{G} = \dfrac{1}{M-2}\mathbf{E}$). Соответствующее укорочение системы (4.2.1) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}} = -dU_M(\mathbf{x}). \tag{4.2.3}$$

В условиях теоремы система (4.2.3) имеет частное решение в виде растущего прямолинейного луча:

$$\mathbf{x}^- = (-t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \alpha = \frac{1}{M-2}, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на сфере $S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{p}\| = 1\}$. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Phi(\mathbf{x}, a) = U_M(\mathbf{x}, a) + \frac{a}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 - 1). \tag{4.2.4}$$

Поскольку в точке условного экстремума $d\Phi(\mathbf{e}, a) = \mathbf{0}$, то

$$dU_M(\mathbf{e}) = -a\mathbf{e}. \tag{4.2.5}$$

Домножая (4.2.5) скалярно на $\mathbf{e}$ и применяя теорему Эйлера об однородных функциях, получим

$$a = -M \min_{\mathbf{p}\in S^{n-1}} U_M(\mathbf{p}) > 0.$$

Положим теперь $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$. Используя (4.2.5), найдем, что

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.1.2, откуда следует, что система уравнений (4.2.1) имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+1)}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^-. \tag{4.2.6}$$

Теорема доказана.

Замечание 4.2.1. Если потенциал $U(\mathbf{x})$ и компоненты матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ аналитичны, то ряд (4.2.6) сходится для $t \in (-\infty, -T]$, где $T > 0$ достаточно велико.

Для доказательства применим теорему 1.2.1. Оценим собственные значения матрицы Ковалевской

$$\mathbf{K} = \alpha\mathbf{E} + d^2U_M(\mathbf{x}_0^-) = \alpha\big(\mathbf{E} + a^{-1}\, d^2U_M(\mathbf{e})\big).$$

Для этого воспользуемся свойством второй вариации функции Лагранжа (4.2.4): для любого $\xi \in T_{\mathbf{e}}S^{n-1}$

$$\left\langle d^2_{\mathbf{xx}}\Phi(\mathbf{e}, a)\xi, \xi\right\rangle = \frac{a}{\alpha}\langle \mathbf{K}\xi, \xi\rangle \geqslant 0.$$

Поэтому все собственные числа матрицы Ковалевской (которая в данном случае симметрична) положительны, кроме одного, равного -1.

Это собственное число единственное, удовлетворяющее резонансному соотношению вида $\rho = -k\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому выполнены все условия теоремы 1.2.1. Что и требовалось доказать.

Для обобщенно-градиентных систем утверждение, аналогичное теореме 4.2.1 доказать пока не удалось. Для систем, имеющих гамильтонов вид (4.1.5), это утверждение к тому же просто неверно. Имеет место более слабый результат.

Теорема 4.2.2. *Пусть степень первой нетривиальной формы $U_M(\mathbf{x})$ разложения потенциальной энергии в ряд Маклорена нечетна и критическая точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ формы $U_M(\mathbf{x})$ изолирована. Тогда особая точка обобщенноградиентной системы* (4.1.2) *неустойчива и существует частное асимптотическое решение* (4.1.2) $\mathbf{x}(t) \to 0$ *при* $t \to -\infty$, *для которого предел* (4.2.2) *существует и конечен.*

Доказательство. Как и в предыдущем случае, выделим из (4.1.2) укорочение при помощи группы однородных растяжений, порождаемой матрицей $\mathbf{G} = \dfrac{1}{M-2}\mathbf{E}$. Это укорочение будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{-1}\, dU_M(\mathbf{x}), \tag{4.2.7}$$

где, как и прежде, обозначено $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0})$.

Тот факт, что укороченная система (4.2.7) имеет прямолинейное растущее решение $\mathbf{x}^{-}(t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^{-}$, $\alpha = \dfrac{1}{M-2}$ в виде луча, следует из леммы 1.1.1. Действительно, поскольку $M-1$ — степень однородного векторного поля $\mathbf{B}^{-1}\, dU_M(\mathbf{x})$ четна, то индекс этого поля четен, и оно имеет собственные векторы как с положительными, так и отрицательными собственными значениями. Для завершения доказательства применим теорему 1.1.2.

Теорема доказана.

Критерий неустойчивости, сформулированный в теореме 4.2.2, можно также отнести к энергетическим, поскольку в этом случае потенциальная энергия в окрестности рассматриваемой критической точки знакопеременна. К сожалению, собственные числа матрицы Ковалевской в данном случае не могут быть оценены так, как при доказательстве теоремы 4.2.1, поэтому сделать заключение о сходимости рядов (4.2.6), изображающих искомое решение, нельзя.

Перейдем к нахождению критериев неустойчивости положений равновесия механических систем, движение которых описывается системами уравнений типа (4.1.1). Как и для предыдущих задач, будем считать, что разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена начинается с членов по крайней мере третьего порядка. Разложим матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{s=S}^{\infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{x}), \quad S \geqslant 0,$$

где компоненты матриц $\mathbf{B}_s(\mathbf{x})$ — однородные функции $\mathbf{x}$ степени s.

В этом параграфе мы изучим действие на систему сильно вырожденных непотенциальных сил, т. е. будем считать, что $S > 0$.

Теорема 4.2.3. *Пусть первая нетривиальная форма $U_M(\mathbf{x})$, $M \geqslant 3$ разложения потенциальной энергии в ряд Маклорена не имеет минимума и $S > [(M-2)/2]$. Тогда равновесное решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы* (4.1.1) *неустойчиво и существует частное асимптотическое решение* (4.1.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$, $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to -\infty$.

При отсутствии непотенциальных сил этот результат был доказан в работах [54, 65], а для случая вырожденных гироскопических сил — в [120, 113].

Доказательство. Система уравнений (4.1.1) является положительно полуквазиоднородной относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\underbrace{M\alpha, \ldots, M\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{x}}), \quad \alpha = \frac{1}{M-2}, \quad \beta = \alpha.$$

Поскольку рассматриваемая система записана в нормальных координатах, т. е. $\mathbf{K}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$, и имеет место неравенство $S > [(M-2)/2]$, то нетрудно заметить, что соответствующее квазиоднородное укорочение имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = -dU_M(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}. \tag{4.2.8}$$

Система уравнений (4.2.8) квазиоднородна в смысле определения 1.1.2 с показателями $M, \ldots, M, 2, \ldots, 2$ и степенью $q = M-1$. Если условия теоремы 4.2.3 выполнены, то эта система имеет растущее решение в виде квазиоднородного луча

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-M\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{y}_0^-(t) = 2\alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на сфере $S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\colon \|\mathbf{p}\| = 1\}$. Используя равенство (4.2.5), получим

$$\mathbf{x}_0^- = \left(\frac{2M\alpha^2}{a}\right)^{\alpha}.$$

Итак, выполнены все условия теоремы 1.1.2, откуда следует, что система уравнений (4.1.1) имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+2)}, && \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^-, \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+M)}, && \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^-. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Теорема доказана.

Заметим, что если система аналитична, т. е. аналитичны потенциальная энергия $U(\mathbf{x})$, а также компоненты матриц $\mathbf{K}(x)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, то ряды (4.2.9) сходятся для $t \in (-\infty, -T]$, где $T > 0$ достаточно велико. Действительно, матрица Ковалевской имеет в рассматриваемом случае следующий блочный вид:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} M\alpha\mathbf{E} & d^2U_M(\mathbf{x}_0^-) \\ -\mathbf{E} & 2\alpha\mathbf{E} \end{pmatrix}$$

(не путать с матрицей кинетической энергии!).

Выполняя элементарные преобразования строк соответствующего определителя, можно показать, что собственные значения матрицы $\mathbf{K}$ удовлетворяют уравнению

$$\det\bigl(d^2U_M(\mathbf{x}_0^-) + (\rho - 2\alpha)(\rho - M\alpha)\mathbf{E}\bigr) = 0.$$

Пусть $k_1, \ldots, k_n$ — собственные значения симметричной матрицы

$$\mathbf{K}^* = 2M\alpha^2\mathbf{E} + d^2U_M(\mathbf{x}_0^-).$$

С одной стороны, воспользовавшись теоремой Эйлера об однородных функциях и равенством (4.2.5), получим

$$\mathbf{K}^*\mathbf{e} = \|\mathbf{x}_0^-\|^{M-2}(M-1)dU_M(\mathbf{e}) + 2M\alpha^2\mathbf{e} = -2M\alpha\mathbf{e},$$

т. е. можно считать, что $k_1 = -2M\alpha$.

С другой стороны, можно снова воспользоваться свойством второй вариации функции Лагранжа (4.2.4): для любого $\xi \in T_{\mathbf{e}}S^{n-1}$

$$\bigl\langle d^2_{\mathbf{xx}}\Phi(\mathbf{e}, a)\xi, \xi\bigr\rangle = \frac{a}{2M\alpha^2}\langle\mathbf{K}^*\xi, \xi\rangle \geqslant 0,$$

т. е. $k_2, \ldots, k_n$ неотрицательны.

Следовательно, первая пара собственных чисел матрицы Ковалевской равна

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_{n+1} = 2M\alpha,$$

а остальные —

$$\rho_{j,n+j} = \frac{M+2}{2(M-2)}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4k_j\left(\frac{M-2}{M+2}\right)^2}\right), \quad j = 2, \ldots, n.$$

Если подкоренное выражение в приведенной формуле неотрицательно, то числа $\rho_{j,n+j}$ положительны, если же это выражение отрицательно, то они комплексны. В любом случае $\rho_1 = -1$ — единственное собственное число матрицы Ковалевской вида $-k\alpha$, поэтому все условия теоремы 1.2.1 выполнены. Что и требовалось доказать.

Теорема 4.2.3 верна, разумеется, и для случая $M = 2$ $(S \geqslant 1)$. Она легко выводится из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [81]. Для случая гироскопических сил соответствующее утверждение сформулировано в работе Л. Сальвадори [184].

Теорема 4.2.3 доказывает утверждение, известное в физике как теорема Ирншоу [106] о том, что любое равновесие заряда в электростатическом поле всегда неустойчиво. В самом деле, пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ рассматриваемое положение равновесия заряда. Рассмотрим разложение потенциальной энергии электростатического поля в окрестности этого равновесия:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{m=M} U_M(\mathbf{x}).$$

Из электростатики известно, что функция $U(\mathbf{x})$ гармоническая:

$$(\Delta U)(\mathbf{x}) \equiv 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

— оператор Лапласа. Поэтому гармоническими являются все формы ее разложения Маклорена, в частности форма $U_M(\mathbf{x})$. Согласно принципу максимума для гармонических функций (см., например, [77]), $U_M(\mathbf{x})$ знакопеременна, Тогда для $M = 2$ результат о неустойчивости следует из классической теоремы Ляпунова [177], а для $M > 2$ — из теоремы 4.2.3. Это интересное следствие было впервые сформулировано в работе [53].

В работе [61] теорема Ирншоу распространена на случай, когда силовая функция V (это — потенциальная энергия с обратным знаком) *субгармоническая*: $\Delta V \geqslant 0$. Более точно, пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — положение равновесия — критическая точка гладкой субгармонической силовой функции и ее ряд Маклорена в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ отличен от нуля. Тогда это равновесие неустойчиво. В аналитическом случае для неустойчивости достаточно условия субгармоничности.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении достаточных условий неустойчивости положений равновесия первого рода механических систем, движение которых стеснено некоторыми неголономными связями. Напомним, что теорема об *устойчивости* 4.1.7 полного обращения не допускает. Нижеследующий результат сформулирован и доказан в [62].

Теорема 4.2.4. *Рассмотрим $(n-d)$-мерную плоскость*

$$\pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{W}^T(\mathbf{0})\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \tag{4.2.10}$$

и однородную форму $V_M(\mathbf{x})$ на плоскости π, являющуюся сужением формы $U_M(\mathbf{x})$, $M \geqslant 3$, на плоскость π ($V_M = U_M|_{\mathbf{x}\in\pi}$). Если форма $V_M(\mathbf{x})$ не имеет минимума, то равновесное решение системы (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$*, где непотенциальная сила $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ порождена связями* (4.1.19)*, неустойчиво, и существует частное асимптотическое решение* (4.1.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ *при $t \to -\infty$, лежащее на инвариантном многообразии, задаваемом уравнениями связи* (4.1.19)*.*

Доказательство. Как и в предыдущем случае, легко заметить, что система уравнений (4.1.1) является положительно полуквазиоднородной относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(\underbrace{M\alpha, \ldots, M\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{x}}), \quad \alpha = \frac{1}{M-2}, \quad \beta = \alpha.$$

Соответствующее укорочение имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = -dU_M(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{0})\left(\mathbf{W}^T(\mathbf{0})\mathbf{W}(\mathbf{0})\right)^{-1}\mathbf{W}^T(\mathbf{0})dU_M(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}. \tag{4.2.11}$$

Докажем, что если условия теоремы 4.2.4 выполнены, то укороченная система (4.2.11) имеет растущее решение в виде квазиоднородного луча

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-M\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{y}_0^- = 2\alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку форма $V_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \pi$ не имеет минимума, то можно положить $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на множестве $\pi \cap S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{p}\| = 1, \mathbf{W}(\mathbf{0})\mathbf{p} = \mathbf{0}\}$.

Поскольку уравнения, задающие плоскость π, имеют вид (4.2.10), то соответствующая функция Лагранжа равна

$$\Phi(\mathbf{x}, a, \boldsymbol{\mu}) = U_M(\mathbf{x}) + \frac{a}{2}\left(\|\mathbf{x}\|^2 - 1\right) - \langle\mathbf{W}(\mathbf{0})\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}\rangle, \tag{4.2.12}$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — неопределенные множители Лагранжа. В точке условного экстремума $d\Phi(\mathbf{x}, a, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$, поэтому

$$dU_M(\mathbf{e}) = -a\mathbf{e} + \mathbf{W}(\mathbf{0})\boldsymbol{\mu}. \tag{4.2.13}$$

Домножим (4.2.13) скалярно на $\mathbf{e}$ и, применяя теорему Эйлера об однородных функциях, получим

$$a = -M \min_{\mathbf{p}\in S^{n-1}\cap\pi} U_M(\mathbf{p}) > 0.$$

Из (4.2.13) найдем значение $\boldsymbol{\mu}$. К левой и правой части (4.2.13) применим линейный оператор с матрицей $\mathbf{W}^T(\mathbf{0})$. Поскольку $\mathbf{e}\in\pi$, то $\mathbf{W}^T(\mathbf{0})\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{\mu} = \big(\mathbf{W}^T(\mathbf{0})\mathbf{W}(\mathbf{0})\big)^{-1}\mathbf{W}^T(\mathbf{0})\, dU_M(\mathbf{e}).$$

Теперь величину $\|\mathbf{x}_0^-\|$ можно вычислить но формуле

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{2M\alpha^2}{a}\right)^{\alpha}$$

Итак, выполнены все условия теоремы 1.1.2, откуда следует, что уравнения (4.1.1) имеют частное решение с асимптотическим разложением (4.2.9). Для завершения доказательства необходимо показать, что найденная асимптотическая траектория $(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))$ лежит на инвариантном многообразии, задаваемом уравнениями (4.2.19). Очевидно, что при $t\to-\infty$ вектор-функция

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{W}^T\big(\mathbf{x}(t)\big)d_{\mathbf{y}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big) \to 0.$$

Вычислим производную по времени от $\mathbf{g}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}\Big(x(t), d_{\mathbf{y}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big)\Big)+\\ + \mathbf{W}^T\big(\mathbf{x}(t)\big)\Big(d^2_{\mathbf{yy}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big)\big(-d_{\mathbf{x}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big) + \mathbf{Q}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big)\big)+\\ + d^2_{\mathbf{xy}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big)d_{\mathbf{y}}H\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big)\Big).\end{aligned}$$

Учитывая, что согласно построению $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (см., например, (4.2.11))

$$\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{W}^T\big(d^2_{\mathbf{yy}}H(-d_{\mathbf{x}}H + \mathbf{Q}) + d^2_{\mathbf{xy}}H d_{\mathbf{y}}H\big) \equiv \mathbf{0},$$

будем иметь $\dot{\mathbf{g}}(t)\equiv\mathbf{0}$, откуда $\mathbf{g}(t)\equiv\mathbf{0}$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема верна, разумеется, и при $M=2$. Соответствующее утверждение принадлежит Уиттекеру [109].

В заключение остановимся на случае, когда матрица $\mathbf{W}(\mathbf{0})$ имеет ранг, меньший d. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда на систему наложена единственная связь

$$\big\langle \mathbf{w}(\mathbf{x}), d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big\rangle = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{4.2.14}$$

В этом случае вектор множителей Лагранжа одномерен. Систему уравнений (4.1.20) можно также разрешить относительно множителя λ, однако, получившаяся система будет иметь сингулярность. Действительно, дифференцируя (4.2.14) по времени и подставляя выражения для $\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}$ из системы (4.1.20), получим

$$\begin{gathered}\lambda = \Big(\big\langle d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{w}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})\big\rangle\Big)^{-1}\Big(\big\langle d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ - d^2_{\mathbf{yx}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{w}(\mathbf{x})\big\rangle - \big\langle d\mathbf{w}(\mathbf{x}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big\rangle\Big).\end{gathered}$$

Обозначим через σ величину

$$\sigma = \big(\langle \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})\rangle\big)^{-1,}$$

и рассмотрим расширенную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= -d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma\Big(\big\langle d^2_{\mathbf{yy}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ &\quad - d^2_{\mathbf{yx}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{w}(\mathbf{x})\big\rangle - \\ &\quad - \big\langle d\mathbf{w}(\mathbf{x}) d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big\rangle\Big)\mathbf{w}(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}} &= d_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\sigma} &= -\sigma^2\big\langle \boldsymbol{\Theta}\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}(\mathbf{x})\big) + 2\mathbf{K}(\mathbf{x}) d\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{w}(\mathbf{x})\big\rangle, \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

где $\boldsymbol{\Theta}\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot\big)$ — некоторое квадратичное по третьему аргументу отображение, коэффициенты которого линейно зависят от $\mathbf{y}$, а коэффициенты соответствующих линейных форм представляют собой частные производные компонент матрицы кинетической энергии $\mathbf{K}(\mathbf{x})$.

Система (4.2.15) уже не имеет сингулярностей. Для (4.2.15) точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = 0$, $\sigma = 0$ является особой точкой (положением равновесия).

Рассмотрим разложение векторного поля $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ в степенной ряд в окрестности начала координат

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{r=R}^{\infty} \mathbf{w}_r(\mathbf{x}), \quad R \geqslant 1.$$

Теорема 4.2.5. [114] *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *связь* (4.2.14)*, наложенная на систему, является слабо-неголономной* (*терминология Я. В. Татаринова*)*, т. е. первая нетривиальная форма разложения векторного поля* $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ *является градиентом некоторой однородной функции*:

$$\mathbf{w}_R(\mathbf{x}) = d\varphi_{R+1}(\mathbf{x});$$

2) *множество*

$$\pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_{R+1}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\} \tag{4.2.16}$$

не пусто и точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *— единственная критическая точка однородной функции* $\varphi_{R+1}(\mathbf{x})$;

3) *однородная функция* $V_M(\mathbf{x})$*, определенная на множестве* π*, и являющаяся сужением формы* $U_M(\mathbf{x})$*,* $M \geqslant 3$ *на множество* π ($V_M = U_M|_{\mathbf{x}\in\pi}$)*, не имеет минимума.*

Тогда существует лежащее на порожденном связью инвариантном многообразии частное решение системы (4.1.1) (*непотенциальная сила* $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *определяется связью* (4.2.14))*, такое, что* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to -\infty$*.*

Доказательство. Система уравнений (4.2.15) является следствием системы (4.1.1). Систему (4.2.15) можно рассматривать как положительно полуквазиоднородную относительно структуры, порождаемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\underbrace{M\alpha, \ldots, M\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{x}}, \underbrace{-4R\alpha}_{\sigma}), \quad \alpha = \frac{1}{M-2}, \quad \beta = \alpha.$$

Выпишем ее укорочение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= -dU_M(\mathbf{x}) + \sigma\Big(\big\langle dU_M(\mathbf{x}), \mathbf{w}_R(\mathbf{x})\big\rangle\big\langle d\mathbf{w}_R(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{y}\big\rangle\Big)\mathbf{w}_R(\mathbf{x}),\\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{y},\\ \dot{\sigma} &= -2\sigma^2\big\langle d\mathbf{w}_R(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{w}_R(\mathbf{x})\big\rangle. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Система уравнений (4.2.17) квазиоднородна в смысле определения 1.1.2 с показателями $M, \ldots, M, 2, \ldots, 2, -4R$ и степенью $q = M - 1$. Докажем, что при выполнении условий теоремы 4.2.5 система уравнений (4.2.17) имеет частное решение в виде квазиоднородного луча:

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-M\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \sigma^-(t) = (-t)^{4R\alpha}\sigma_0^-,$$
$$\mathbf{y}_0^- = 2\alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma_0^- \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что в системе (4.2.17) $\mathbf{w}_R(\mathbf{x})$, $d\mathbf{w}_R(\mathbf{x})$ можно заменить на $d\varphi_{R+1}(\mathbf{x})$, $d^2\varphi_{R+1}(\mathbf{x})$. Положим $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на множестве $\pi \cap S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{p}\| = 1, \varphi_{R+1}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$, а

$$\sigma_0^- = \|d\varphi_{R+1}(\mathbf{x}_0^-)\|^{-2}.$$

Из первого уравнения укороченной системы и теоремы Эйлера об однородных функциях вытекает равенство

$$dU_M(\mathbf{x}_0^-) + 2M\alpha^2\mathbf{x}_0^- = \\ = \|d\varphi_{R+1}(\mathbf{x}_0^-)\|^{-2}\big\langle dU_M(\mathbf{x}_0^-), d\varphi_{R+1}(\mathbf{x}_0^-)\big\rangle d\varphi_{R+1}(\mathbf{x}_0^-). \quad (4.2.18)$$

Используя (4.2.16), составим функцию Лагранжа

$$\Phi(\mathbf{x}, a, \mu) = U_M(\mathbf{x}) + \frac{a}{2}\big(\|\mathbf{x}\|^2 - 1\big) - \mu\varphi_{R+1}(\mathbf{x}). \quad (4.2.19)$$

Поскольку в точке условного экстремума $d\Phi(\mathbf{x}, a, \mu) = \mathbf{0}$, имеет место равенство

$$dU_M(\mathbf{e}) = -a\mathbf{e} + \mu d\varphi_{R+1}(\mathbf{e}). \quad (4.2.20)$$

Домножая (4.2.20) скалярно на $\mathbf{e}$ и применяя теорему Эйлера об однородных функциях, получим

$$a = -M \min_{\mathbf{p} \in S^{n-1} \cap \pi} U_M(\mathbf{p}) > 0.$$

С другой стороны, домножая (4.2.20) скалярно на $d\varphi_{R+1}(\mathbf{e})$, можем найти выражение для μ:

$$\mu = \|d\varphi_{R+1}(\mathbf{e})\|^{-2}\big\langle dU_M(\mathbf{e}), d\varphi_{R+1}(\mathbf{e})\big\rangle.$$

Поэтому, чтобы удовлетворить равенству (4.2.18), достаточно положить

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{2M\alpha^2}{a}\right)^{\alpha}.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.1.2 и поэтому уравнения (4.2.15) имеют частное решение с асимптотическими разложениями

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+2)}, && \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^-,\\
\mathbf{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+M)}, && \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^-,\\
\sigma(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k-4R)}, && \sigma_0 = \sigma_0^-.
\end{aligned}
\tag{4.2.21}
$$

Теперь для завершения доказательства теоремы необходимо потребовать, чтобы тождественно выполнялись следующие равенства:

$$
\begin{gathered}
g(t) = \bigl\langle \mathbf{w}\bigl(\mathbf{x}(t)\bigr), d_{\mathbf{y}} H\bigl(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\bigr)\bigr\rangle \equiv \mathbf{0},\\
f(t) = \sigma(t)\bigl\langle d^2_{\mathbf{yy}} H\bigl(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\bigr)\mathbf{w}\bigl(\mathbf{x}(t)\bigr), \mathbf{w}\bigl(\mathbf{x}(t)\bigr)\bigr\rangle \equiv \mathbf{1}.
\end{gathered}
$$

Доказательство этого факта аналогично рассуждениям, использовавшимся при доказательстве теоремы 4.2.4. Заметим сначала, что при $t \to -\infty$ скалярные функции $g(t)$ и $f(t)$ стремятся соответственно к 0 и 1. Затем следует вычислить производные этих функций и убедиться в том, что они тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

Сформулированная теорема остается верна и в случае $M = 2$. Доказательство приведено в [114]. Ситуация, в которой матрица $\mathbf{W}(\mathbf{0})$ имеет ранг, меньший, чем количество связей, может встретиться при исследовании голономных систем, конфигурационное многообразие которых имеет особенности (например, острие конуса). Такого рода пример разобран в [114].

На основе анализа второй вариации функционалов Лагранжа (4.2.12) и (4.2.19) можно было бы сделать заключения о свойствах *части* собственных чисел матрицы Ковалевской. К сожалению, этой информации недостаточно для доказательства сходимости рядов (4.2.9) (в случае теоремы 4.2.4) или (4.2.21) (в случае теоремы 4.2.5). При этом следует помнить, что *действительные* движения рассматриваемых систем лежат на некоторых инвариантных множествах, поэтому вполне вероятно, что для определения комплексной структуры найденных асимптотических решений вполне достаточно было бы знать свойства лишь части собственных чисел матрицы Ковалевской, однако, в этой ситуации теорема 1.2.1 уже неприменима.

В заключение отметим, что в работах [113, 114] использован другой подход к доказательству существования асимптотических траекторий систем, стесненных связями: наряду с асимптотическими разложениями обобщенных координат и импульсов строились асимптотические разложения множителей Лагранжа. В частности в работе [114] показано, что если в положении равновесия связь вырождается (значения множителя Лагранжа могут быть при этом произвольными), то на асимптотической траектории при $t \to -\infty$ этот множитель будет иметь неустранимую особенность.

3. Сингулярные задачи

В этом параграфе будет рассмотрен класс задач, охарактеризованных в предыдущей главе как сингулярные, т. е. такие, в которых при выделении укорочений происходит потеря производных.

Как и в § 2, начнем с изучения градиентных систем (4.2.1). Приведем еще одно утверждение, сформулированное в [53], касающееся гипотезы Р. Тома [35]. В предыдущем параграфе было доказано утверждение о существовании асимптотического при $t \to -\infty$ решения системы (4.2.1) с характеристическим направлением (теорема 4.2.1) в весьма «вырожденной ситуации», когда разложение потенциальной энергии в ряд в окрестности критической точки начинается с членов по крайней мере третьего порядка. Эта теорема верна, разумеется, и для случая, когда отсутствие минимума потенциала распознается уже по квадратичным членам разложения. Это утверждение следует из того факта, что в рассматриваемом случае характеристическое уравнение системы первого приближения имеет *действительный* положительный корень. Рассмотрим более тонкую ситуацию. Пусть вторая вариация потенциальной энергии, вычисленная в критической точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, является положительной (но не положительно-определенной) квадратичной формой, т. е.

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{m=2} U_m(\mathbf{x}), \quad U_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad \det \mathbf{A} = 0.$$

Рассмотрим подробнее оператор с симметрической матрицей $\mathbf{A}$. Пусть π — d-мерная плоскость ($d < n$):

$$\pi = \operatorname{Ker} \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \tag{4.3.1}$$

Теорема 4.3.1. [53] *Предположим, что разложение $U(\mathbf{x})$ имеет вид*

$$U(\mathbf{x}) = U_2(\mathbf{x}) + \sum_{m=M}^{\infty} U_m(\mathbf{x}), \quad M \geqslant 3. \tag{4.3.2}$$

Рассмотрим однородную форму $V_M(\mathbf{x})$ на плоскости π, являющуюся сужением формы $U_M(\mathbf{x})$ на плоскость π ($V_M = U_M|_{\mathbf{x}\in\pi}$). Если форма $V_M(\mathbf{x})$ не имеет минимума, то особая точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (4.2.1) *неустойчива, причем существует асимптотическое решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$ с характеристическим направлением* (4.2.2).

Доказательство. Систему (4.2.1) запишем в виде системы, неразрешенной относительно производных

$$\mathbf{D}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + dU(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{4.3.3}$$

Вектор $\mathbf{x}$ представим в виде двух взаимно-перпендикулярных составляющих $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $\mathbf{x}' \in \operatorname{Ker}\mathbf{A} = \pi$, $\mathbf{x}'' \in \operatorname{Im}\mathbf{A} = \pi^\perp$, $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} \oplus \operatorname{Im}\mathbf{A}$. Далее через $\mathbf{A}$ будем обозначать также сужение оператора $\mathbf{A}$ на $\pi^\perp$. Систему координат в $\mathbb{R}^n$ можно выбрать таким образом, что $\mathbf{D}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$. Исследуемая система, записанная в виде (4.3.3), является положительно полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.2 относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей $\mathbf{G} = \alpha\mathbf{E}$, $\alpha = \dfrac{1}{M-2}$. При этом параметр β равен α, а матрица $\mathbf{Q}$ имеет вид

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\underbrace{(M-1)\alpha, \ldots, (M-1)\alpha}_{\mathbf{x}'}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{\mathbf{x}''}).$$

Как легко заметить, укороченная система запишется в виде двух подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}' + d_{\mathbf{x}'}U_M(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{0}. \tag{4.3.4}$$

Покажем для начала, что система дифференциально-алгебраических уравнений (4.3.4) имеет частное решение в виде луча:

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^-.$$

Поскольку форма $V_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \pi$, не имеет минимума, то можно принять $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на сфере $S^{d-1} = \pi \cap S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\colon \|\mathbf{p}\| = 1, \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}\}$.

В соответствии с (4.3.1) с учетом того, что все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ неотрицательны, рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Phi(\mathbf{x}, a, \mu) = U_M(\mathbf{x}) + \frac{a}{2}\bigl(\|\mathbf{x}\|^2 - 1\bigr) - \mu U_2(\mathbf{x}), \tag{4.3.5}$$

Запишем условие равенства нулю градиента функции (4.3.5) в проекциях на подпространства $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ и $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ соответственно:

$$\begin{gathered} d_{\mathbf{x}'}U_M(\mathbf{e},\mathbf{0}) + a\mathbf{e} = \mathbf{0}, \\ d_{\mathbf{x}''}U_M(\mathbf{e},\mathbf{0}) - \mu\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{4.3.6}$$

Поскольку $\mathbf{e} \in \pi$, то из второго равенства (4.3.6) следует, что

$$d_{\mathbf{x}''}U_M(\mathbf{x}_0^-) = \|\mathbf{x}_0^-\|^{M-1} d_{\mathbf{x}''}U_M(\mathbf{e},\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

С другой стороны, поскольку $U_M(\mathbf{x}',\mathbf{0}) = V_M(\mathbf{x})$, то, домножая первое равенство (4.3.6) на $\mathbf{e}$ и используя теорему Эйлера об однородных функциях, получим

$$a = -M \min_{\mathbf{p}\in S^{d-1}} V_M(\mathbf{p}) = -M \min_{\mathbf{p}\in S^{n-1}\cap\pi} U_M(\mathbf{p}) > 0.$$

Тогда, используя первое равенство (4.3.5), найдем, что

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}.$$

Следующий шаг в доказательстве теоремы 4.3.1 должен заключаться в вычислении матриц $\mathbf{B}_k^{(4)}$, которые фигурируют в условиях теоремы 3.3.1 и доказательстве их невырожденности. Нетрудно увидеть, что в рассматриваемом случае матрицы

$$\mathbf{B}_k^{(4)} = \mathbf{A}|_{\pi^\perp}, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

действительно невырождены.

Таким образом, все условия теоремы 3.3.1 выполнены и система уравнений (4.3.3) (а, следовательно, и (4.2.1)) имеет гладкое частное решение с асимптотическим разложением (4.2.6).

Теорема доказана.

Заметим, что данное доказательство теоремы 4.3.1 слегка отличается от приведенного в [53], поскольку не опирается на *лемму о расщеплении* [35].

Следующая проблема, которую мы рассмотрим, посвящена обращению теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия. Приводимый ниже результат сформулирован и доказан в статье [53]. Мы видоизменим доказательство из [53], которое также опиралось на лемму о расщеплении.

Теорема 4.3.2. *Пусть потенциальная энергия обратимой консервативной механической системы, движение которой описывается системой уравнений Гамильтона* (4.1.3)*, имеет вид* (4.3.2) *и ее вторая вариация* $U_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ *является положительно полуопределенной квадратичной формой. Пусть форма* $V_M(\mathbf{x})$*, где* $V_M(\mathbf{x})$ *— сужение формы* $U_M(\mathbf{x})$ *на плоскость* π*, задаваемую системой равенств* (4.3.1) $(V_M = U_M|_{\mathbf{x}\in\pi})$*, не имеет минимума. Тогда равновесное решение* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (4.1.3) *неустойчиво и существует частное асимптотическое решение* (4.1.3) $\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\big) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ *при* $t \to -\infty$*.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3.3.2. Для этого систему (4.1.3) перепишем в явном виде:

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - dU(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{y},$$

где $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \cdot)$ — квадратичное по второму аргументу отображение, коэффициентами которого являются частные производные компонент матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{x})$.

Спроектируем эту систему на подпространства π и $\pi^\perp$ $(\mathbb{R}^n = \pi \oplus \pi^\perp)$ и, обозначив через $\mathbf{y}'$ проекцию вектора $\mathbf{y}$ на подпространство π, а через $\mathbf{y}''$ проекцию $\mathbf{y}$ на подпространство $\pi^\perp$, запишем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{y}}' = -\mathbf{\Psi}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d_{\mathbf{x}'}U(\mathbf{x}), \\ &\mathbf{x}'' = -\mathbf{A}^{-1}\Big(\dot{\mathbf{y}}'' + \mathbf{\Psi}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbf{x}''}\big(U(\mathbf{x}) - U_2(\mathbf{x})\big)\Big), \\ &\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{K}'(\mathbf{x})\mathbf{y}' + \mathbf{M}'(\mathbf{x})\mathbf{y}'', \quad \dot{\mathbf{x}}'' = \mathbf{K}''(\mathbf{x})\mathbf{y}'' + \mathbf{M}''(\mathbf{x})\mathbf{y}', \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

где $\mathbf{\Psi}', \mathbf{\Psi}''$ — проекции вектора $\mathbf{\Psi}$ на подпространства π и $\pi^\perp$ соответственно, матрицы $\mathbf{K}', \mathbf{K}'', \mathbf{M}', \mathbf{M}''$ имеют порядки $d \times d$, $(n-d) \times (n-d)$, $d \times (n-d)$, $(n-d) \times d$, причем матрицы $\mathbf{K}'(\mathbf{0}), \mathbf{K}''(\mathbf{0})$ являются единичными, а $\mathbf{M}'(\mathbf{0}), \mathbf{M}''(\mathbf{0})$ нулевыми матрицами соответствующих порядков (разложения компонент матриц $\mathbf{M}'(\mathbf{x}), \mathbf{M}''(\mathbf{x})$ в ряд Маклорена в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ начинается по крайней мере с линейных членов).

Продифференцировав вторую группу уравнений системы (4.3.7) по времени, получим

$$\dot{\mathbf{x}}'' = -\mathbf{A}^{-1}\Big(\ddot{\mathbf{y}}'' + d_{\mathbf{x}}\mathbf{\Psi}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{\mathbf{y}}\mathbf{\Psi}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + d^2_{\mathbf{x}''\mathbf{x}}\big(U(\mathbf{x}) - U_2(\mathbf{x})\big)\dot{\mathbf{x}}\Big). \tag{4.3.8}$$

Последнюю группу равенств (4.3.7) перепишем в виде

$$\mathbf{y}'' = \big(\mathbf{K}''(\mathbf{x})\big)^{-1}\big(\dot{\mathbf{x}}'' - \mathbf{M}''(\mathbf{x})\mathbf{y}'\big)$$

и продифференцируем эти равенства по t с учетом (4.3.8).

Объединив получившиеся равенства с (4.3.8), а также с первой и третьей группой равенств из (4.3.7), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{y}}' = -\boldsymbol{\Psi}'(\mathbf{x},\mathbf{y}) - d_{\mathbf{x}'}U(\mathbf{x}),\\
&\dot{\mathbf{y}}'' = -\big(\mathbf{K}''(\mathbf{x})\big)^{-1}\big(A^{-1}\dddot{\mathbf{y}}'' + d_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\mathbf{y})\ddot{\mathbf{x}} + d_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}}\big)+\\
&\qquad + \boldsymbol{\Phi}_1''(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\Phi}_2''(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{x}},\dot{\mathbf{y}}) + \boldsymbol{\Phi}_3''(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) + \boldsymbol{\Phi}_4''(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})+\\
&\qquad + \boldsymbol{\Phi}_5''(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{P}''(\mathbf{x})\dot{\mathbf{y}}',\\
&\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{K}'(\mathbf{x})\mathbf{y}' + \mathbf{M}'(\mathbf{x})\mathbf{y}'',\\
&\dot{\mathbf{x}}'' = -\mathbf{A}^{-1}\big(\ddot{\mathbf{y}}'' + d_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\mathbf{y})\dot{\mathbf{x}} + d_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}+\\
&\qquad + d^2_{\mathbf{x}''\mathbf{x}}\big(U(\mathbf{x}) - U_2(\mathbf{x})\big)\dot{\mathbf{x}}\big).
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

Здесь $\boldsymbol{\Phi}_1''(\mathbf{x},\mathbf{y},\cdot)$, $\boldsymbol{\Phi}_3''(\mathbf{x},\mathbf{y},\cdot)$, $\boldsymbol{\Phi}_4''(\mathbf{x},\cdot)$ — отображения, квадратичные по последнему аргументу, $\boldsymbol{\Phi}_2''(\mathbf{x},\mathbf{y},\cdot,\cdot)$, $\boldsymbol{\Phi}_5''(\mathbf{x},\cdot,\cdot)$ — отображения, билинейные по двум последним аргументам, а $\mathbf{P}''(\mathbf{x})$ — матрица, разложения компонент которой в степенной ряд в окрестности $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ не содержат свободных членов.

Система (4.3.9), неразрешенная относительно старших производных, является положительно полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.5 относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(\underbrace{M\alpha,\ldots,M\alpha}_{\mathbf{y}},\underbrace{2\alpha,\ldots,2\alpha}_{\mathbf{x}}).$$

При этом можно положить $\beta=\alpha$. Учитывая, что матрица Якоби $d_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\cdot)$ квадратична, а матрица $d_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\Psi}''(\mathbf{x},\cdot)$ линейна по второму аргументу, вычислим соответствующее укорочение

$$\dot{\mathbf{y}}' + d_{\mathbf{x}'}U_M(\mathbf{x}',\mathbf{x}'') = \mathbf{0},\quad \dot{\mathbf{y}}'' = \mathbf{0},\quad \dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{y}',\quad \dot{\mathbf{x}}'' = \mathbf{0}. \tag{4.3.10}$$

Покажем, что система дифференциальных уравнений (4.3.10) имеет частное решение в виде квазиоднородного луча

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{x}_0^-,\quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-M\alpha}\mathbf{y}_0^-,\quad \mathbf{y}_0^- = 2\alpha\mathbf{x}_0^-,\quad \mathbf{x}_0^-\in\mathbb{R}^n.$$

Поскольку форма $V_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\pi$, не имеет минимума, то, как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно положить $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\|=1$ — вектор, на котором функция $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на множестве $S^{d-1} = \pi\cap S^{n-1} = \{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^n\colon \|\mathbf{p}\|=1, \mathbf{A}\mathbf{p}=\mathbf{0}\}$.

Снова рассмотрим функцию Лагранжа (4.3.5) и воспользуемся равенствами (4.3.6). Из этих равенств следует, что

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{2M\alpha^2}{a}\right)^{\alpha}.$$

Таким образом, укороченная система (4.3.10) обладает необходимым решением. Следовательно, в соответствии с теоремой 4.3.2 система (4.3.9) имеет частное решение с асимптотическим разложением (4.2.9). Система (4.3.9) получена из (4.1.3) при помощи дифференцирования отдельных групп уравнений. Интегрируя эти уравнения в пределах от $-\infty$ да до t, получим, что найденные решения удовлетворяют также и (4.1.3).

Теорема доказана.

Перейдем к изучению достаточных условий существования асимптотических решений уравнений движения механических систем, на которые действуют непотенциальные силы. Напомним, что движение таких систем в самом общем виде описывается уравнениями (4.1.1). Мы сформулируем два варианта частичного обращения теорем 4.1.2 и 4.1.3 первого параграфа.

Теорема 4.3.3. *Пусть* $\det\big(B(\mathbf{0})\big) \neq \mathbf{0}$ *и точка* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — *единственная критическая точка однородной формы* $U_M(\mathbf{x})$ — *первой нетривиальной формы разложения потенциальной энергии* $U(\mathbf{x})$ *в ряд Маклорена. Если* M *нечетно, то равновесное решение* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы уравнений* (4.1.1) *неустойчиво, и существует частное решение* (4.1.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$, $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to -\infty$.

Доказательство. Перепишем (4.1.1) в виде

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + dU(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{4.3.11}$$

Поскольку $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{K}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$, то $\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{B}(\mathbf{0})$. Система (4.3.11), неразрешенная относительно производных, является положительно полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.2 относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(\underbrace{(M-1)\alpha, \ldots, (M-1)\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{\mathbf{x}}).$$

Параметр β следует положить равным α, а матрицу $\mathbf{Q}$ взять в виде $\mathbf{Q} = (M-1)\alpha\mathbf{E}$. Тогда получившаяся укороченная система примет вид

$$dU_M(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{y} = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \tag{4.3.12}$$

где введено обозначение $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0})$.

Система (4.3.12) имеет частное решение в виде квазиоднородного луча

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-(M-1)\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{y}_0^- = \alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n.$$

При этом можно положить $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, единичный вектор, удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{B}^{-1}dU_M(\mathbf{e}) = a\mathbf{e}$$

для некоторого положительного a.

Существование такого вектора следует из леммы 1.1.1, поскольку в силу нечетности M индекс однородного обобщенно-градиентного векторного поля $\mathbf{B}^{-1}dU_M(\mathbf{x})$ четен. Следовательно, норму $\|\mathbf{x}_0^-\|$ можно найти по формуле

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}.$$

Для того, чтобы воспользоваться теоремой 3.3.1, необходимо вычислить матрицы $\mathbf{B}_k^{(4)}$, $k = 1, 2, \ldots$ и доказать их невырожденность. В рассматриваемом случае $\mathbf{B}_k^{(4)} = -\mathbf{B}$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому все условия теоремы 3.3.1 выполнены. Это означает, что система уравнений (4.3.11), а следовательно, и (4.1.1) имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+1)}, && \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^-, \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+M+1)}, && \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^-. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Теорема доказана.

Поскольку при нечетном M потенциальная энергия системы $U(\mathbf{x})$ заведомо не имеет минимума в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то данную теорему можно рассматривать как частичное обращение теоремы 4.1.3.

Для случая гироскопических сил ($\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$) теорема 4.3.3 была впервые сформулирована и доказана в малодоступном издании [111]. Из-за этого эта теорема была фактически передоказана в статьях [20, 148]. В этих работах теорема 4.3.3 доказывалась при помощи построения формального инвариантного многообразия. Поскольку в рассматриваемой ситуации диссипативные силы отсутствуют, то авторам удалось доказать, что это многообразие будет симплектическим, и редуцированная на него система имеет гамильтонову форму. Еще ранее в [115] эта теорема была доказана для систем с двумя степенями свободы при условии постоянства компонент матриц кинетической энергии и гироскопических сил. Для доказательства использовалась теорема А. Г. Сокольского о неустойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и одной нулевой частотой [104]. В полном объеме теорема 4.3.3 установлена в [59].

Если, наоборот, мы имеем дело лишь с диссипативными силами, то можно ослабить требования на первую форму разложения потенциальной энергии [59].

Теорема 4.3.4. *Пусть* $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}(\mathbf{x})$*, и пусть* $\mathbf{D}(\mathbf{0})$ *— положительно определенная симметрическая матрица, т. е. выполнена оценка*

$$\big\langle \mathbf{D}(\mathbf{0})\xi, \xi \big\rangle \geqslant C\|\xi\|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad C > 0.$$

Если первая нетривиальная форма $U_M(\mathbf{x})$*,* $M \geqslant 3$ *разложения потенциальной энергии системы в окрестности* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *не имеет минимума, то положение равновесия системы* (4.1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *неустойчиво и существует частное асимптотическое решение системы* (4.1.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to -\infty$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы лишь в деталях отличается от доказательства предыдущей. Решение укороченной системы (4.3.12) в виде луча

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-(M-1)\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{y}_0^- = \alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n$$

строится следующим образом: положим $\mathbf{x}_0^- = \nu\mathbf{p}$, где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ — вектор, на котором $U_M(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на эллипсоиде

$$S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \mathbf{D}\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 1\}.$$

Мы сохранили здесь обозначение S^{n-1}, поскольку эллипсоид топологически эквивалентен сфере. Здесь также $\mathbf{D}(\mathbf{0}) = \mathbf{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{B}$. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Phi(\mathbf{x}, a) = U_M(\mathbf{x}) + \frac{a}{2}\left(\langle \mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1\right). \tag{4.3.14}$$

Условия экстремума функции (4.3.14) приводят к равенству

$$dU_M(\mathbf{p}) = -a\mathbf{D}\mathbf{p}. \tag{4.3.15}$$

Домножив (4.3.15) на $\mathbf{p}$ скалярно, получим знакомое неравенство

$$a = -M \min_{p \in S^{n-1}} U_M(\mathbf{p}) > 0.$$

Нетрудно также увидеть, что

$$\nu = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}.$$

Применив затем теорему 3.3.1, получим, что уравнения (4.1.1) имеют частное решение с асимптотикой (4.3.13).

Теорема доказана.

В более ранней работе [112] рассматривалась задача, в некотором смысле «противоположная» данной: изучались достаточные условия существования траекторий систем, находящихся под действием диссипативных сил, соответствующих решениям уравнений движения, асимптотическим к равновесиям при $t \to +\infty$. Интересно, что для существования таких решений оказалось достаточно, чтобы $U_M(\mathbf{x})$ не имела *максимума*.

Заметим также, что теорема 4.3.4 остается верной и в случае $M = 2$. Для доказательства достаточно рассмотреть систему первого приближения.

В заключение рассмотрим задачу нахождения достаточных условий неустойчивости тривиального равновесного решения и существования асимптотических при $t \to -\infty$ решений систем уравнений типа (4.1.7). В § 1 мы доказали теорему об асимптотической устойчивости равновесного решения системы (4.1.7). В то время как условия асимптотической устойчивости, по-видимому, практически неулучшаемая, условия неустойчивости можно существенно ослабить. Например, ниже мы уже не будем требовать, чтобы все собственные числа матрицы $\mathbf{\Lambda} = d_c\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ лежали в левой полуплоскости. Ограничимся лишь требованием невырожденности этой матрицы.

Теорема 4.3.5. *Пусть* $\det \mathbf{B} \neq 0$*,* $\det \mathbf{\Lambda} \neq 0$ *где* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0},\mathbf{0})$*, и пусть* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *— единственная критическая точка первой нетривиальной формы* $U_M(\mathbf{x},\mathbf{0})$ *разложения потенциальной энергии с нечетным* M*. Тогда равновесное решение системы уравнений* (4.1.7) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *неустойчиво, и существует асимптотическое при* $t \to -\infty$ *решение системы* (4.1.7) $(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{c}(t)) \to (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Доказательство. Перепишем (4.1.7) в виде системы уравнений, неразрешенных относительно производных

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{c}) + dU(\mathbf{x},\mathbf{c}) - \mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{c})\mathbf{y} = \mathbf{0},\\ \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{c})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{c}) = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{4.3.16}$$

где $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x},\cdot,\mathbf{c})$ — квадратичное по второму аргументу отображение.

Как мы условились ранее, $\mathbf{K}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{E}$. Поэтому $\mathbf{R}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{B}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{B}$. Система (4.3.16) является положительно полуквазиоднородной в смысле определения 3.3.2 относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\underbrace{(M-1)\alpha, \ldots, (M-1)\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{\mathbf{x}}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{\mathbf{c}}).$$

При этом можно положить $\beta = \alpha$, а матрицу $\mathbf{Q}$ равной

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\underbrace{(M-1)\alpha, \ldots, (M-1)\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{(M-1)\alpha, \ldots, (M-1)\alpha}_{\mathbf{x}}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{\mathbf{c}}).$$

Выпишем укороченную систему:

$$dU_M(\mathbf{x},\mathbf{0}) - \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda}\mathbf{c} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{4.3.17}$$

где $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$. При выполнении условий теоремы эта система имеет частное решение в виде квазиоднородного луча:

$$\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-(M-1)\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{c}^-(t) = (-t)^{-\alpha}\mathbf{c}_0^-,$$
$$\mathbf{y}_0^- = \alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{c}_0^- \in \mathbb{R}^d.$$

Из третьей группы уравнений (4.3.17) следует, что

$$\mathbf{c}_0^- = -\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0^-.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.3.3, можно положить $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, существование которого следует из леммы 1.1.1, удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{B}^{-1}\,dU_M(\mathbf{e},\mathbf{0}) = a\mathbf{e},$$

для некоторого положительного a, а

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}.$$

Матрицы $\mathbf{B}_k^{(4)}$, $k = 1, 2, \ldots$, фигурирующие в формулировке теоремы 3.3.1, имеют блочный вид

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix}$$

и их определители по условию теоремы отличны от нуля.

Итак, выполнены все условия теоремы 3.3.1, в силу чего система (4.3.16), а следовательно, и (4.1.7) имеет частное решение с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+1)}, && \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^-, \\
\mathbf{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+M-1)}, && \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^-, \\
\mathbf{c}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k\big(\ln(-t)\big)(-t)^{-\alpha(k+1)}, && \mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0^-.
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Теорема доказана.

Если на систему гироскопические силы не действуют, то требования, налагаемые на форму $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, как и в случае с теоремами 4.3.3, 4.3.4, можно ослабить.

Теорема 4.3.6. *Пусть* $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \equiv -\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$*, и пусть* $\mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ *— положительно определенная симметрическая матрица, т. е. выполнена оценка*

$$\big\langle \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{0})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \big\rangle \geqslant C\|\boldsymbol{\xi}\|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad C > 0.$$

Если $\det \boldsymbol{\Lambda} \neq 0$*, и при* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *первая нетривиальная форма* $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$*,* $M \geqslant 3$*, разложения потенциальной энергии в ряд Маклорена в окрестности равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *не имеет минимума, то равновесное решение системы уравнений* (4.1.7) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$*,* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *неустойчиво, и существует асимптотическое при* $t \to -\infty$ *решение системы* (4.1.7) $\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{c}(t)\big) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы «комбинируется» из доказательств теорем 4.3.4 и4.3.5. Для построения решения системы (4.3.17) в виде луча нужно взять $\mathbf{x}_0^- = \nu\mathbf{p}$, где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \neq 0$ — вектор, на котором $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ принимает минимальное значение на эллипсоиде

$$S^{n-1} = \big\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \big\langle \mathbf{D}\mathbf{p}, \mathbf{p} \big\rangle = 1\big\},$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, а

$$\nu = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 4.3.5. Разложения асимптотических решений в ряды снова имеют вид (4.3.18).

Теорема доказана.

Оказывается, что неустойчивость равновесного решения (4.1.7) при отсутствии минимума формы $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ сохраняется, если на систему действуют только потенциальные силы.

Теорема 4.3.7. *Пусть* $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \equiv \mathbf{0}$, $\det \mathbf{\Lambda} \neq \mathbf{0}$ *и первая нетривиальная форма* $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, $M \geqslant 3$ *разложения потенциальной энергии при* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *в ряд Маклорена в окрестности равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *не имеет минимума. Тогда решение системы уравнений* (4.1.7) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *неустойчиво и существует асимптотическое при* $t \to -\infty$ *решение системы* (4.1.7) $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{c}(t)) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Доказательство. Хотя внешне теорема 4.3.7 может показаться лишь частным случаем теоремы 4.3.6, между этими двумя утверждениями существует принципиальная разница: отсутствие непотенциальных сил приводит к другой квазиоднородной шкале и, как следствие, к другим разложениям асимптотических решений.

Снова запишем систему (4.1.7) в виде системы, неразрешенной относительно производных

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) + dU(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{0},\\ \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{c})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{4.3.19}$$

Система (4.3.19) положительно полуквазиоднородна в смысле определения 3.3.2 относительно структуры, задаваемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(\underbrace{M\alpha, \ldots, M\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{x}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{c}}).$$

При этом $\beta = \alpha$, а матрица $\mathbf{Q}$ имеет вид

$$\mathbf{G} = \operatorname{diag}(\underbrace{2(M-1)\alpha, \ldots, 2(M-1)\alpha}_{\mathbf{y}}, \underbrace{M\alpha, \ldots, M\alpha}_{\mathbf{x}}, \underbrace{2\alpha, \ldots, 2\alpha}_{\mathbf{c}}).$$

Легко понять, как в этом случае выглядит укороченная система:

$$\dot{\mathbf{y}} + dU_M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda}\mathbf{c} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{4.3.20}$$

Она имеет частное решение в виде квазиоднородного луча:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{y}^-(t) = (-t)^{-M\alpha}\mathbf{y}_0^-, \quad \mathbf{c}^-(t) = (-t)^{-2\alpha}\mathbf{c}_0^-,\\ \mathbf{y}_0^- = 2\alpha\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{c}_0^- \in \mathbb{R}^d.\end{gathered}$$

Из третьей группы уравнений (4.3.20) следует, что

$$\mathbf{c}_0^- = -\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0^- .$$

Положим $\mathbf{x}_0^- = \|\mathbf{x}_0^-\|\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, на котором форма $U_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ принимает минимальное значение на сфере

$$S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{p}\| = 1\} .$$

При этом, как и ранее (в теоремах 4.2.3–4.2.5, 4.3.2),

$$\|\mathbf{x}_0^-\| = \left(\frac{2M\alpha^2}{a}\right)^{\alpha} .$$

Далее, используя алгоритм теоремы 3.3.1, вычислим матрицы $\mathbf{B}_k^{(4)}$, $k = 1, 2, \ldots$. В рассматриваемой ситуации эти матрицы равны $\mathbf{\Lambda}$. Следовательно, в силу невырожденности $\mathbf{\Lambda}$, выполнены все условия теоремы 3.3.1, и система (4.3.19), а следовательно, и (4.1.7) имеет частное решение, компоненты которого имеют асимптотические разложения

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+2)}, &\qquad \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0^-, \\
\mathbf{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+M)}, &\qquad \mathbf{y}_0 &= \mathbf{y}_0^-, \\
\mathbf{c}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-\alpha(k+2)}, &\qquad \mathbf{c}_0 &= \mathbf{c}_0^- .
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Теорема доказана.

Как мы видим, ряды (4.3.18) и (4.3.21) отличаются. Связано это с тем, что в системе (4.3.20) по сравнению с системой (4.3.17) потеряно «меньшее количество» производных, поэтому асимптотические свойства искомых решений системы (4.1.7) при наличии и отсутствии непотенциальных сил должны различаться.

В заключение этого параграфа приведем некоторые новые результаты о невозможности гироскопической стабилизации вырожденных положений равновесия механических систем. Сначала рассмотрим *сильно* вырожденный случай, когда ряд Маклорена потенциальной энергии начинается с однородной формы степени $m \geqslant 3$:

$$U = U_m + U_{m+1} + \ldots .$$

Будем предполагать, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — единственная критическая точка однородного многочлена U_m. В частности, равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ будет изолированным.

Предположим, что равновесие не является точкой экстремума формы U_m. В этом случае конус

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : U_m(\mathbf{x}) = 0\} \tag{4.3.22}$$

не сводится к одной точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Пусть Λ — пересечение конуса (4.3.22) со сферой

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

При указанных только что условиях Λ есть *регулярное* алгебраическое многообразие размерности $n-2$. Оно может состоять из нескольких связных компонент.

Положим еще $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Omega}|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$; $\mathbf{\Gamma}$ — кососимметрическая $n \times n$ матрица.

Теорема 4.3.8. [56] *Пусть* $\det \mathbf{\Gamma} \neq 0$ *и эйлерова характеристика хотя бы одной связной компоненты* Λ *отлична от нуля. Тогда равновесие* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчиво.*

Кстати сказать, Λ инвариантно при инволюции $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$. Значит, это многообразие можно рассматривать и в проективном пространстве $\mathbb{R}P^{n-1}$, которое получается из сферы S^{n-1} отождествлением ее антиподальных точек. Изучение топологии вещественных проективных многообразий является вполне классической проблемой. Если $\chi(\Lambda) \neq 0$, то этому условию, очевидно, удовлетворяет хотя бы одна связная компонента многообразия Λ.

Поскольку кососимметрическая матрица Γ невырождена, то n четно. Следовательно, $\dim \Lambda$ также четна. Напомним, что эйлерова характеристика любого компактного многообразия нечетной размерности рана нулю.

Изложим схему доказательства теоремы 4.3.8. Представим уравнение движения в виде, неразрешенном относительно старших производных:

$$\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}).$$

Здесь $\mathbf{G}$ — гладкая вектор-функция, которая обращается в нуль при $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Выделим нелинейную гамильтонову систему первого порядка

$$\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

и будем искать ее нетривиальное степенное решение

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{c}}{t^\alpha}; \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \alpha = \frac{1}{m-2} > 0. \tag{4.3.23}$$

Этот вопрос упирается в наличие решений алгебраической системы уравнений

$$\alpha \mathbf{c} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{c}}. \tag{4.3.24}$$

В рассматриваемом случае лемма 1.1.1, к сожалению, не применима. Разрешимость системы (4.3.24) вытекает из других топологических рассмотрений.

Траектория решения вида (4.3.23), очевидно, лежит в конусе (4.3.22).

Пусть $\mathbf{w}$ — векторное поле на Λ^{n-2}, которое получается проектированием векторов $\mathbf{\Gamma}^{-1} U_m^1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda^{n-2}$ на касательную плоскость $T_{\mathbf{x}}\Lambda$. Поскольку $\chi(\Lambda) \neq 0$, то это поле имеет особые точки, в которых

$$\lambda \mathbf{c} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{c}}, \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 1$$

и $\lambda \neq 0$. Умножая вектор $\mathbf{c}$ на подходящее число, получим нетривиальное решение алгебраического уравнения (4.3.24) (возможно, со знаком минус в левой части). Но это означает наличие в укороченной системе «входящего» или «выходящего» луча. Согласно теореме 3.1.1, тем же свойством обладает и полная система уравнений движения. Поскольку исходная система гамильтонова, то ее фазовый поток сохраняет стандартную меру в фазовом пространстве. Если имеется асимптотическое решение, «входящее» в положение равновесия, то это равновесие также неустойчиво согласно лемме 1.3.4.

В общем случае, согласно *лемме о расщеплении* [35], в окрестности критической точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ потенциальная энергия приводится к виду

$$\frac{1}{2}(\pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2) + W(x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

где W — гладкая функция от $n - r$ переменных $\mathbf{z} = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$, причем ее ряд Маклорена начинается с однородной формы степени $k \geqslant 3$:

$$W = W_k + W_{k+1} + \ldots.$$

Пусть $\Pi = \{\mathbf{z}\}$ — $(n - r)$-мерное линейное пространство, выделяемое уравнениями $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Будем предполагать, что $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ — единственная критическая точка однородной функции $W_k : \Pi \to \mathbb{R}$. В частности, равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ рассматриваемой системы будет изолированным. Если форма W_k принимает значения разных знаков, то

$$\tilde{\Lambda} = \{\mathbf{z} \in \Pi : W_k(\mathbf{z}) = 0, \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 1\}$$

— непустое регулярное многообразие размерности $n - r - 2$.

Ограничим 2-форму гироскопических сил

$$(\mathbf{\Gamma x}', \mathbf{x}'') \tag{4.3.25}$$

на линейное пространство Π. Это ограничение будет *невырожденной* 2-формой, если для любого $\mathbf{x}' \in \Pi \backslash \{\mathbf{0}\}$ найдется $\mathbf{x}'' \in \Pi$ такое, что значение (4.3.25) не равно нулю. Для невырожденности необходимо, чтобы $n-r$ было четным. Критерий невырожденности состоит в том, что кососимметрическая матрица $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ — пересечение последних $n-r$ строк и $n-r$ столбцов матрицы $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ — невырожденная.

Теорема 4.3.9. [56] *Пусть* $\det \tilde{\Gamma} \neq 0$ *и выполнимо одно из следующих топологических условий*:

1) *индекс градиентного векторного поля* $\mathbf{z} \mapsto W_k'(\mathbf{z})$ *в точке* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *отличен от* $(-1)^{n-r}$,

2) $\chi(\tilde{\Lambda}) \neq 0$.

Тогда равновесие $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *неустойчиво.*

Это утверждение доказывается также, как и теорема 4.3.8. Уравнения движения представляются в следующем виде:

$$\mathbf{y} = \ldots, \quad \tilde{\mathbf{\Gamma}}\dot{\mathbf{z}} = -\frac{\partial W_k}{\partial \mathbf{z}} + \ldots,$$

где $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_r)$, а многоточие обозначает ряд из мономов от переменных $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ и $\ddot{\mathbf{x}}$. Условия 1) и 2) гарантируют наличие у гамильтоновой системы

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}\dot{\mathbf{z}} = -\frac{\partial W_k}{\partial \mathbf{z}} \tag{4.3.26}$$

асимптотического решения вида (4.3.26), которое затем последовательно «разворачивается» в формальный ряд по обратным степеням времени, удовлетворяющий «полной» системе уравнений (4.3.26).

Подводя некоторые итоги, заметим, что системы уравнений движения, имеющие асимптотические решения с неэкспоненциальным порядком стремления к положению равновесия, являются сингулярными, если их линеаризации нетривиальны: т. е. соответствующие характеристические уравнения имеют ненулевые корни. С механической точки зрения к этим эффектам может привести:

а) нетривиальность второй вариации потенциальной энергии в положении равновесия;

б) невырожденность матрицы, определяющей непотенциальные силы, вычисленной в положении равновесия;

в) изменение во времени параметров системы.

В этих случаях асимптотические ряды, построенные для соответствующих решений, будут, скорее всего, расходиться.

Приложение A

Неэкспоненциальные асимптотические решения систем функционально-дифференциальных уравнений

Как было отмечено во введении, изложенные методы построения частных решений годятся для более широкого класса объектов, чем системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве простейшего объекта, допускающего применение описанных методов, рассмотрим гладкие системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+t_1), \ldots, \mathbf{x}(t+t_s)\big), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big)$ — гладкая вектор-функция своих аргументов, относительно которой будем предполагать, что каждая ее компонента раскладывается в формальный ряд Маклорена по компонентам векторов $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}(t), \ldots, \mathbf{x}_{(s)} = \mathbf{x}(t+t_s)$.

Для знакомства с теорией таких систем можно порекомендовать монографию [141]. Предположим, что $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ является тривиальным решением системы (A.1), т. е. $\mathbf{f} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогда вполне естественно возникает вопрос об устойчивости такого решения. Ляпуновская теория устойчивости с некоторыми (и порой весьма существенными) изменениями переносится на системы уравнений с отклоняющимся аргументом. Не будем останавливаться здесь на деталях и сошлемся на уже цитировавшуюся монографию [141]. Н. Н. Красовский доказал теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению, (см. его оригинальную работу [74] или [141]). Эти теоремы были доказаны преимущественно с помощью *второго* метода Ляпунова. Второй метод Ляпунова использовался также и при анализе различных критических случаев [136, 137, 134, 135]. Следует сразу отметить, что анализ критических случаев для систем уравнений с отклоняющимся аргументом — задача весьма трудоемкая, и критерии устойчивости практически никогда не выражаются в терминах коэффициентов *исход-*

ной системы. Таким образом, классические идеи первого метода Ляпунова использовались в теории систем с отклоняющимся аргументом довольно редко. Мы покажем, что эти идеи могут быть использованы при получении необходимых условий неустойчивости именно в критических случаях. Для систем рассматриваемого типа при дополнительных предположениях Ю. С. Осиповым была доказана важная теорема о центральном многообразии [95], позволяющая сводить исследование критических случаев устойчивости систем уравнений с отклоняющимся аргументом к анализу некоторой конечномерной системы дифференциальных уравнений. Мы рассмотрим «суперкритический» случай, когда все корни системы первого приближения нулевые, и, следовательно, редукция на конечномерное центральное многообразие невозможна.

Оснастим пространство $(\mathbb{R}^n)^{s+1}$ переменных $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}$ квазиоднородной структурой. Пусть, как обычно, $\mathbf{G}$ — некоторая матрица с вещественными элементами, собственные числа которой имеют строго *положительные* вещественные части. Зададим группу квазиоднородных растяжений следующим образом:

$$\mathbf{x}_{(0)} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(0)},\ \mathbf{x}_{(1)} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(s)}.$$

Определение А.1. Систему уравнений (А.1) назовем *квазиоднородной* относительно квазиоднородной структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}$, и будем обозначать ее правую часть как $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}$, если для любых $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}$ и любого $\mu \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(0)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(s)}\big) = \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big). \tag{А.2}$$

Следует отметить, что если для квазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в типичной ситуации сама квазиоднородная структура порождала частные решения типа лучей, то квазиоднородные системы уравнений с отклоняющимся аргументом таких решений вообще, как правило, не имеют.

Определение А.2. Систему уравнений (А.1) назовем *полуквазиоднородной* относительно структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}$, если ее правая часть представима в виде формальной суммы

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big)$$

такой, что существует положительное число β, что для любых $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}$ и $\mu \in \mathbb{R}^+$ для любой m-й формы $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}$ выполнено равенство:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(0)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(s)}\big)\mu^{\mathbf{G}+m\beta\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big). \tag{А.3}$$

В силу специфики систем уравнений типа (А.1) имеет смысл рассматривать только положительно полуквазиоднородные системы, поэтому всюду ниже мы будем предполагать, что $\beta > 0$.

Выделение квазиоднородных укорочений систем уравнений с отклоняющимся аргументом может быть осуществлено при помощи уже описанной техники многогранников Ньютона, поэтому мы не будем на этом останавливаться подробно.

Рассмотрим укороченную модельную систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}), \tag{А.4}$$

где

$$\mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}).$$

Оказывается, что в «суперкритическом» случае отклонения аргумента фактически не влияют на *неустойчивость* системы. Грубо говоря, если неустойчива система (А.4), то неустойчива и система (А.1). Точнее, имеет место утверждение, обобщающее теорему из статьи [119].

Теорема А.1. *Пусть система* (А.1) *полуквазиоднородна и пусть выполнены одновременно следующие условия*:

1) *существует такой вектор* $\mathbf{x}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0^\gamma \neq \mathbf{0}$ *и число* $\gamma = \pm 1$, *что имеет место равенство*

$$-\gamma \mathbf{G} \mathbf{x}_0^\gamma = \mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^\gamma), \tag{А.5}$$

2)

$$\operatorname{sign} \gamma = \operatorname{sign} t_j, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{А.6}$$

Тогда система (А.1) *имеет частное решение* $\mathbf{x}(t) \to 0$ *при* $t \to \gamma \times \infty$.

Доказательство.

1-й шаг. Построение формального решения.

Это решение мы будем искать в привычном для нас виде:

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(\gamma t)\bigr)(\gamma t)^{-k\beta}. \tag{А.7}$$

Для доказательства существования формального решения системы (А.1) в виде (А.7) мы применим теорему 3.3.2. Пусть $t_j \neq 0$ — одно из чисел $t_1, \ldots, t_s$. Рассмотрим формальное разложение вектор-функции $\mathbf{x}_{(j)}(t) = \mathbf{x}(t + t_j)$ в ряд по степеням величины t_j:

$$\mathbf{x}_{(j)}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(p)}(t)}{p!}(t_j)^p.$$

Из этого разложения видно, что с формальной точки зрения система уравнений (A.1) может быть переписана в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{f}}\big(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(p)}(t), \ldots\big), \tag{A.8}$$

правая часть которой содержит *бесконечное* число производных высших порядков.

Система (A.8), неразрешенная (и неразрешимая!) относительно старших производных, является положительно полуквазиоднородной относительно структуры, задаваемой матрицей $\mathbf{G}$ в смысле определения 3.3.5. Ее квазиоднородное укорочение совпадает, очевидно, с системой обыкновенных уравнений (A.4) (см. равенства (A.2) и (A.3)), которая в силу (A.5) имеет решение в виде квазиоднородного луча. Поэтому существование формального частного решения системы (A.1) в виде (A.7) автоматически следует из теоремы 3.3.2.

Следует отметить, что условие (A.6) для построения *формального* асимптотического решения рассматриваемой системы не используется.

2-й шаг. Доказательство существования асимптотического решения системы (A.1), для которого (A.7) является асимптотическим разложением.

Сделаем замену зависимой и независимой переменных по формулам:

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(\xi), \quad \xi = \varepsilon^{-1}(\gamma t)^{-\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

После этого система (A.1) примет вид:

$$-\gamma\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi}(\xi) = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y}(\xi) + \sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mathbf{y}_{(0)}(\xi,\varepsilon), \ldots, \mathbf{y}_{(s)}(\xi,\varepsilon)\big), \tag{A.9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{(j)}(\xi,\varepsilon) = \Big(1 + \gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\Big)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}\Big(\xi\big(1 + \gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\big)^{-\beta}\Big),$$
$$j = 0, \ldots, s, \quad t_0 = 0.$$

Пусть $\mathbf{y}(\xi)$ — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция. Легко видеть, что при $\varepsilon \to 0+$ вектор-функции $\mathbf{y}_{(j)}(\xi,\varepsilon)$ стремятся к $\mathbf{y}(\xi)$ равномерно на $[0,1]$ для любого номера $j = 0, \ldots, s$.

Далее доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.1.2 (2-й шаг), связанное с применением к системе (A.9) теоремы о неявной функции [50]. Отсюда же становится ясен смысл условия (A.6): при его выполнении $\mathbf{y}_{(j)}(\xi,\varepsilon)$ принадлежит $\mathbf{C}[0,1]$, если только вектор-функция $\mathbf{y}(\xi)$ принадлежит $\mathbf{C}[0,1]$ вместе со своей первой производной, и $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Единственное существенное отличие доказательства данной теоремы от доказательства теоремы 1.1.2 состоит в следующем. Рассмотрим линейные операторы

$$\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon)\colon \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta}, \quad j = 1,\ldots,s,$$

действующие на вектор-функции $\mathbf{z} \in \mathfrak{B}_{1,\Delta}$ по правилу:

$$\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon)(\mathbf{z})(\xi) = \mathbf{z}_{(j)}(\xi,\varepsilon) = \left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-\mathbf{G}} \mathbf{z}\left(\xi\left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-\beta}\right).$$

Необходимо иметь в виду, что $\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon)$ можно рассматривать на более широком пространстве, т. е. как линейные операторы, отображающие пространство $\mathfrak{B}_{0,\Delta}$ в себя. Однако $\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon)$ являются непрерывными операторными функциями ε лишь как отображения $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$ в $\mathfrak{B}_{0,\Delta}$. Поэтому, например, приведенное доказательство не годится для систем уравнений нейтрального типа, где отклонения аргумента входят в выражения со старшими производными (по поводу классификации систем уравнений с отклоняющимся аргументом см. монографию [141]).

Итак, докажем непрерывность $\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon)$ по ε. Это доказательство основано на формуле конечных приращений и том факте, что положительную постоянную β всегда можно считать меньшей единицы:

$$\begin{gathered}
\left\|\mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon_1) - \mathbf{T}_{(j)}(\varepsilon_2)\mathbf{z}\right\|_{0,\Delta} = \\
= \left\|\left(1+\gamma t_j(\varepsilon_1\xi)^{1/\beta}\right)^{-\mathbf{G}} \mathbf{z}\left(\xi\left(1+\gamma t_j(\varepsilon_1\xi)^{1/\beta}\right)^{-\beta}\right) - \right. \\
\left. - \left(1+\gamma t_j(\varepsilon_2\xi)^{1/\beta}\right)^{-\mathbf{G}} \mathbf{z}\left(\xi\left(1+\gamma t_j(\varepsilon_2\xi)^{1/\beta}\right)^{-\beta}\right)\right\|_{0,\Delta} \leqslant \\
\leqslant \sup_{\xi\in[0,1],\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \xi^{-\Delta+1/\beta}\gamma t_j \left\| -\mathbf{G}\left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-(\mathbf{G}+\mathbf{E})} \times \right. \\
\times \mathbf{z}\left(\xi\left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-\beta}\right) + \left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-(\mathbf{G}+(\beta+1)\mathbf{E})} \times \\
\left. \times \left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta} - \beta\xi\right)\mathbf{z}'\left(\xi\left(1+\gamma t_j(\varepsilon\xi)^{1/\beta}\right)^{-\beta}\right)\right\| \times \\
\times \left|\varepsilon_1^{1/\beta} - \varepsilon_2^{1/\beta}\right| \leqslant C\|\mathbf{z}\|_{1,\Delta}\left|\varepsilon_1^{1/\beta} - \varepsilon_2^{1/\beta}\right|,
\end{gathered}$$

где $\mathbf{z} \in \mathfrak{B}_{1,\Delta}$ — произвольная вектор-функция, а постоянная $C > 0$ не зависит от $\mathbf{z}$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации доказанной теоремы рассмотрим простой пример.

ПРИМЕР А.1. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{3}x^4(t), \quad \dot{y}(t) = -\frac{2}{3}x(t+t_1)y^2(t).$$

В соответствии с приведенной терминологией эта система является квазиоднородной относительно структуры с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1/3, 2/3)$, что, как уже было отмечено, не гарантирует существование частного решения в виде квазиоднородного луча. Тем не менее достаточно легко «угадать» асимптотическое при $t \to \pm\infty$ решение рассматриваемой системы

$$x(t) = t^{-1/3}, \quad y(t) = (t+t_1)^{-2/3}.$$

Оно допускает разложение в ряд вида (А.7)

$$x(t) = t^{-1/3}, \quad y(t) = t^{-2/3}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{t_1}{t} + \frac{5}{9}\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 - \ldots\right).$$

Модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\frac{1}{3}x^4, \quad \dot{y}(t) = -\frac{2}{3}xy^2$$

имеет частное решение в виде луча

$$x^{\pm}(t) = t^{-1/3}, \quad y^{\pm}(t) = t^{-2/3},$$

которое представляет собой главный член асимптотического разложения найденного частного решения полной системы.

Теорема А.1 имеет важное приложение в теории устойчивости.

Теорема А.2. *Пусть система уравнений* (А.1) *запаздывающего типа* $(t_j < 0, j = 1, \ldots, s)$ *является полуквазиоднородной и существует такой вектор* $\mathbf{x}_0^- \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0^-$, *что имеет место равенство*

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_0^- = \mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^-).$$

Тогда тривиальное решение (А.1) $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *неустойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу же следует из существования частного решения системы (А.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$.

Замечание А.1. Из теоремы А.1 вытекает, что при выполнении определенных условий система *опережающего* типа ($t_j > 0$, $j = 1, \dots, s$) имеет гладкое на некотором бесконечном *положительном* полуинтервале $[T, +\infty)$ частное решение. Это достаточно примечательный факт, поскольку, как известно, задача Коши для систем опережающего типа некорректна.

Ряды, построенные в примере А.1, очевидно, сходятся при $|t| > |t_1|$. В общем случае задача исследования сходимости рядов (А.7) еще сложнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому мы не будем здесь на ней подробно останавливаться. По-видимому, тот факт, что к исследуемой системе применим метод главы 1, основанный на теореме о неявной функции, свидетельствует в пользу сходимости. С другой стороны, для доказательства существования формального решения мы пользовались теоремой 3.3.2, которая является надежным средством анализа *сингулярных* задач, для которых формальные ряды, как правило, расходятся. Заметим, однако, что как и в случае обыкновенных уравнений, наличие *нетривиальной* линейной части приводит к расходимости асимптотических рядов. Формулировка теоремы о существовании асимптотических решений в этом случае потребовала бы обсуждения теории центрального многообразия для систем функционально-дифференциальных уравнений, поэтому мы не будем излагать здесь общий результат, а ограничимся рассмотрением примера, аналогичного примеру 3.1.1. Некоторые общие результаты можно найти в статье [119].

Пример А.2. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x} = -x(t) + y(t + t_1), \quad \dot{y} = -y^2(t), \quad t_1 < 0,$$

второе из которых имеет очевидное решение $y(t) = t^{-1}$. После подстановки в первое уравнение получаем

$$x(t) = e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} (s + t_1)^{-1} e^s \, ds.$$

Эта функция принадлежит, очевидно, пространству $\mathbf{C}^\infty(-\infty, t_1)$, стремится к нулю при $t \to -\infty$ и может быть разложена в формальный всюду расходящийся (но суммируемый по Борелю [127]) ряд

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)!(t + t_1)^{-k}.$$

Этот ряд можно переразложить в степенной ряд по целым отрицательным степеням t. Найдем асимптотику его коэффициентов:

$$x(t) = e^{-t_1} \int\limits_{-\infty}^{t_1} (\sigma + t)^{-1} e^{\sigma}\, d\sigma = -e^{-t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(k, -t_1) t^{-k},$$

где

$$\Gamma(k, \tau) = \int\limits_{\tau}^{-\infty} u^{k-1} e^{u}\, du$$

— неполная гамма-функция Эйлера [142].

Легко видеть, что имеет место оценка

$$\Gamma(k, \tau) \geqslant (k-1)! - k^{-1} \tau^{k}.$$

Изложенная выше методика переносится, вообще говоря, и на более общий класс систем. По-видимому, она применима к функционально-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра в самом общем виде (изложение теории этих уравнений см. в монографии [129]). Здесь мы не будем, однако, приводить это обобщение, а покажем лишь, как применить используемый нами круг идей к автономным функционально-дифференциальным уравнениям запаздывающего типа с дискретными и распределенными запаздываниями. Итак, рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - t_1), \ldots, \mathbf{x}(t - t_s),\\
\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{L}_1(t-u)\mathbf{x}(u)\, du, \ldots, \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{L}_r(t-u)\mathbf{x}(u)\, du\Big),
\end{gathered} \tag{A.10}$$

где $t_1 > 0$, $i = 1, \ldots, s$ (для систем запаздывающего типа дискретным отклонениям аргумента будем приписывать знак *минус*), а $\mathbf{L}_j(\sigma)$, $j = 1, \ldots, r$ — непрерывные на положительном полубесконечном интервале $(0, +\infty)$ матричные функции,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}\big)$$

— гладкая вектор-функция своих аргументов, где введены обозначения:

$$\mathbf{x}_{[1]} = \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{L}_1(t-u)\mathbf{x}(u)\, du, \ldots, \mathbf{x}_{[r]} = \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{L}_r(t-u)\mathbf{x}(u)\, du.$$

Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, как и прежде, является тривиальным решением рассматриваемой системы. Нашей целью будет установление критерия неустойчивости этого решения для «суперкритического» случая. Если в правой части системы (A.10) отсутствуют члены с дискретным запаздыванием $\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}$, то (A.10) является системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра (основы теории этих систем см., например, в монографии [28]). В некритических случаях для систем такого вида разработан аналог первого метода Ляпунова [100, 101].

Сделаем дополнительные предположения относительно системы (A.10). Обычно предполагается, что компоненты матриц $\mathbf{L}_j(\sigma)$, $j = 1, \ldots, r$ экспоненциально убывают, т. е. имеют место неравенства

$$\|\mathbf{L}_j(\sigma)\| \leqslant L_j e^{-a_j \sigma}, \quad \sigma \in (0, +\infty), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Мы наложим более жесткие условия на матрицы $\mathbf{L}_j(\sigma)$, предполагая, что они могут быть разложены в абсолютно сходящиеся ряды вида:

$$\mathbf{L}_j(\sigma) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-a_{jl}\sigma} \big(\mathbf{M}_{jl} \cos(b_{jl}\sigma) + \mathbf{N}_{jl} \sin(b_{jl}\sigma)\big). \qquad \text{(A.11)}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_{jl}^{(0)} = \mathbf{M}_{jl}, \quad \mathbf{N}_{jl}^{(0)} = \mathbf{N}_{jl},\\
&\mathbf{M}_{jl}^{(p+1)} = \frac{1}{a_{jl}^2 + b_{jl}^2} \left(a_{jl}\mathbf{M}_{jl}^{(p)} + b_{jl}\mathbf{N}_{jl}^{(p)}\right),\\
&\mathbf{N}_{jl}^{(p+1)} = \frac{1}{a_{jl}^2 + b_{jl}^2} \left(b_{jl}\mathbf{M}_{jl}^{(p)} - a_{jl}\mathbf{N}_{jl}^{(p)}\right),\\
&p = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Следующее предположение, более сильное, чем предположение об абсолютной сходимости рядов (A.11), будет заключаться в том, что матричные ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M}_{jl}^{(p)}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{N}_{jl}^{(p)} \qquad \text{(A.12)}$$

абсолютно сходятся к некоторым матрицам $\mathbf{M}_j^{(p)}$, $\mathbf{N}_j^{(p)}$, $j = 1, \ldots, r$, $p = 0, 1, \ldots$

Введем для систем типа (A.10) понятия квазиоднородности и полуквазиоднородности.

Определение А.3. Систему уравнений (А.10) назовем *квазиоднородной* относительно квазиоднородной структуры, порожденной матрицей $\mathbf{G}$, и будем обозначать ее правую часть как $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}$, если для любых наборов $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}$ и любого $\mu \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(0)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(s)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{[r]}\big) = \\ = \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}\big).\end{gathered} \tag{А.13}$$

Определение А.4. Систему уравнений (А.10) назовем *полуквазиоднородной* относительно структуры, порожденной матрицей $\boldsymbol{G}$, если ее правая часть представима в виде формальной суммы

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}\big),$$

такой, что для любых $\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}$ и $\mu \in \mathbb{R}^+$ для любой m-й формы $\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(0)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{(s)}, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}_{[r]}\big) = \\ = \mu^{\mathbf{G}+m\beta\mathbf{E}}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+m}\big(\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(s)}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}\big),\end{gathered} \tag{А.14}$$

где β — некоторое положительное число.

Рассмотрим модельную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}), \tag{А.15}$$

где

$$\mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}\big(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{M}_1^{(1)}\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{M}_r^{(1)}\mathbf{x}\big).$$

Мы укажем связь между неустойчивостью в модельной системе (А.15) и неустойчивостью в полной системе (А.10). Однако неустойчивость в полной системе носит *формальный* характер, что будет пояснено ниже.

Теорема А.3. *Пусть система уравнений* (А.10) *полуквазиоднородна и существует такой вектор* $\mathbf{x}_0^-$, $\mathbf{x}_0^- \neq \mathbf{0}$, *что имеет место равенство*

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_0^- = \mathbf{g}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0^-).$$

Тогда система (А.10) *имеет частное формальное решение, представимое в виде ряда, каждый член которого стремится к нулю при* $t \to -\infty$.

Если бы указанный в формулировке теоремы А.3 ряд сходился, то система (А.10) имела бы частное решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$, что означало бы неустойчивость. Мы покажем ниже на конкретном примере, что этот ряд может расходиться. В рассматриваемой ситуации неприменима, однако, теория Кузнецова [75, 76], разработанная лишь для систем *обыкновенных* дифференциальных уравнений, поэтому здесь можно говорить лишь о *формальной* неустойчивости.

Доказательство теоремы А.3. Необходимое частное формальное решение мы снова будем искать в привычном виде:

$$\mathbf{x}(t) = (-t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^{-k\beta}. \tag{А.16}$$

Здесь мы можем снова применить теорему 3.3.2. Применив к вектор-функциям $\mathbf{x}_{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}_{[r]}(t)$ бесконечное число раз операцию интегрирования по частям, получим формальное разложение

$$\mathbf{x}_{[j]}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbf{M}_j^{(p+1)} \mathbf{x}^{(p)}(t)$$

для каждого $j = 1, \ldots, r$. Здесь мы используем абсолютную сходимость рядов (А.12).

Такое представление величин $\mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[r]}$ снова превращает исследуемую систему в систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа (А.8). Из равенств (А.13), (А.14) следует, что эта система (как система, неразрешенная относительно старших производных!) полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой матрицей $\mathbf{G}$ (см. определение 3.3.5), причем ее квазиоднородное укорочение совпадает с системой (А.15), имеющей в соответствии с условиями теоремы частное решение в виде луча, стремящееся к точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$. Применение теоремы 3.3.2 позволяет утверждать, что система (А.10) имеет формальное частное решение в виде ряда (А.16).

Теорема доказана.

Пример А.3. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{x} = x^2(t)\left(1 + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} y(u)\, du\right), \quad \dot{y}(t) = y^2(t).$$

В соответствии с введенными выше определениями эта система полу-(квази)однородна относительно структуры, порожденной единичной матрицей $\mathbf{E}$. Соответствующая модельная система

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y^2$$

имеет очевидное асимптотическое решение

$$x^-(t) = y^-(t) = -\frac{1}{t}.$$

Второе уравнение исходной системы легко интегрируется. Его асимптотическое решение имеет простой вид:

$$y(t) = -t^{-1}.$$

Но тогда результат интегрального преобразования функции $y(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} y(u)\, du = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! t^{-k}$$

представляется в виде всюду расходящегося ряда.

Через $\phi(t)$ обозначим формальное разложение следующего интеграла

$$\phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{u} e^{-(u-v)} v^{-1}\, dv - u^{-1} \right) du = -\sum_{k=2}^{\infty} (k-2)! t^{-k+1}.$$

Теперь мы можем найти разложение формального асимптотического решения первого уравнения рассматриваемой системы

$$x(t) = -t^{-1}\left(1 + t^{-1}\ln(-t) + t^{-1}\phi(t)\right)^{-1} =$$
$$= (-t)^{-1}\left(1 - (-t)^{-1}\ln(-t) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-2)!(-t)^{-k}\right)^{-1}.$$

Переразложив последнее выражение по отрицательным степеням $-t$, мы получим ряд типа (А.16), который, разумеется, будет расходящимся. Как и следовало ожидать, главный член этого разложения будет совпадать с $x^-(t)$.

Рассмотрим приложения построенной теории.

Пример А.4. В первой главе, в примере 1.4.2 рассматривалась так называемая логистическая система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4.3), описывающая процессы межвидового взаимодействия. Надо однако иметь ввиду, что влияние численности особей в популяциях на рождаемость видов происходит с некоторым запаздыванием, что отражено в следующей математической модели, описываемой системой функционально-дифференциальных уравнений, содержащих дискретные и распределенные запаздывания [32, 99]:

$$\dot{N}^i(t) = N^i(t)\left(k_i + b_i^{-1}\sum_{p=1}^{n}\left(a_p^i N^p(t - t_{ip}) + \int\limits_{-\infty}^{t} f_p^i(t-u)N^p(u)\,du\right)\right), \tag{A.17}$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Здесь $t_{ip} > 0$, $i, p = 1, \ldots, n$ — дискретные отклонения аргумента, а матрица

$$\mathbf{F}(\sigma) = \left(f_p^i(\sigma)\right)_{i,p=1}^{n}$$

обладает теми же свойствами, что и матрицы $\mathbf{L}_1(\sigma), \ldots, \mathbf{L}_r(\sigma)$, фигурирующие в формулировке теоремы А.3.

Введем также следующее обозначение:

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \left(\widetilde{f_p^i}\right)_{i,p=1}^{n} = \left(\int\limits_{0}^{\infty} f_p^i(\sigma)\,d\sigma\right)_{i,p=1}^{n}.$$

Найдем достаточные условия неустойчивости тривиального решения системы (А.17) для «суперкритического» случая, когда значения всех «мальтузианских рождаемостей» k_i, $i = 1, \ldots, n$ равны нулю, т. е. среднее число особей в популяциях, предоставленных самим себе, остается неизменным. Итак, объектом наших исследований будет система

$$\dot{N}^i(t) = b_i^{-1}N^i(t)\sum_{p=1}^{n}\left(a_p^i N^p(t - t_{ip}) + \int\limits_{-\infty}^{t} f_p^i(t-u)N^p(u)\,du\right), \tag{A.18}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Система функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа (А.18) является (квази)однородной в соответствии с введенными определениями. Соответствующая модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\dot{N}^i = b_i^{-1} N^i \sum_{p=1}^{n} \bigl(a_p^i + \widetilde{f}_p^i\bigr) N^p, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{A.19}$$

Система (А.19) имеет прямолинейное растущее решение в виде луча

$$\mathbf{N}^-(t) = (-t)^{-1}\mathbf{N}_0^-, \quad \mathbf{N} = (N^1, \ldots, N^n),$$

если разрешима относительно $\mathbf{N}_0^- = \bigl(N_0^{-1}, \ldots, N_0^{-n}\bigr)$ система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{n} \bigl(a_p^i + \widetilde{f}_p^i\bigr) N_0^{-p} = b_i.$$

При этом, разумеется, нужно искать лишь *положительные* решения этой линейной системы, поскольку численность популяций должна быть положительной.

Асимптотическое при $t \to -\infty$ частное решение укороченной системы (А.19) порождает формальное решение полной системы (А.18) вида

$$\mathbf{N}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}_k\bigl(\ln(-t)\bigr)(-t)^k.$$

В случае сходимости этого ряда существование подобного решения означало бы неустойчивость. Если распределенные запаздывания отсутствуют, то по теореме А.2 будем иметь неустойчивость по Ляпунову. Эта неустойчивость носит взрывной характер: находящиеся в некоторый начальный момент времени на грани вымирания популяции начинают разрастаться приблизительно по показательному закону, при этом число особей в них теоретически может стать бесконечным за конечное время. Такой интересный эффект «вытягивания экосистемой себя за волосы» (подобно барону Мюнхгаузену) из «болота вымирания» обсуждался ранее в статье [119] для систем с дискретными запаздываниями.

Приложение В

Арифметические свойства собственных чисел матрицы Ковалевской и условия неинтегрируемости полуквазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Во введении вскользь упоминался ряд работ, посвященных рассмотрению проблемы интегрируемости уравнений движения и хаотического поведения траекторий нелинейных динамических систем с точки зрения ветвления в комплексной плоскости времени частных решений рассматриваемых уравнений, имеющих обобщенно-степенную асимптотику. При этом отмечалось, что строгих результатов, позволяющих трактовать определенные свойства этих решений как препятствия к интегрируемости, весьма немного. В этом приложении мы изложим ряд результатов [162], касающихся неинтегрируемости полуквазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием факта существования решений с обобщенно-степенной асимптотикой. Эту теорию следует рассматривать как теорию нулевого порядка, поскольку в ней существенны лишь свойства квазиоднородных укорочений и главных членов асимптотического разложения решений. Полученные результаты являются продолжением работы Х. Иошиды [201], первым заметившим, что собственные числа матрицы Ковалевской интегрируемой квазиоднородной системы уравнений должны удовлетворять некоторым резонансным соотношениям.

Мы приведем здесь другую трактовку этой идеи, основываясь на иных соображениях. Для того, чтобы проще понять суть явления, рассмотрим следующую упрощенную ситуацию. Пусть дана система дифференциальных уравнений с аналитической правой частью:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \tag{B.1}$$

для которой начало координат $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ является особой точкой ($\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

Пусть $\mathbf{A} = d\mathbf{h}(\mathbf{0})$ — матрица Якоби векторного поля $\mathbf{h}(\mathbf{u})$, вычисленная в особой точке. Далее для простоты будем предполагать, что матрица $\mathbf{A}$ диагонализируема, и что координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ выбраны так, что $\mathbf{A}$ уже имеет диагональный вид: $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Основная идея заключается в том, что если система (B.1) имеет аналитический интеграл, то собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ должны удовлетворять некоторым резонансным условиям. Более точно, имеет место

Лемма B.1. *Пусть* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *и для любых наборов чисел* $k_1, \ldots, k_n$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j \geqslant 1$

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \lambda_j \neq 0. \tag{B.2}$$

Тогда система (B.1) *не имеет ни одного интеграла, бесконечно дифференцируемого в окрестности* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$*, который допускал бы разложение в формальный нетривиальный ряд Маклорена.*

Доказательство. Предположим, что существует гладкая функция $\phi(\mathbf{u})$, допускающая разложение в формальный нетривиальный ряд Маклорена и являющаяся интегралом системы (B.1). Эта функция должна удовлетворять следующему линейному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\big\langle d\phi(\mathbf{u}), \mathbf{h}(\mathbf{u}) \big\rangle = 0, \tag{B.3}$$

где знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает теперь эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Без ограничения общности можно считать, что $\phi(\mathbf{0}) = 0$. Рассмотрим разложение функции $\phi(\mathbf{u})$ в ряд в окрестности $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\phi(\mathbf{u}) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{(s)}(\mathbf{u}),$$

где $\phi_{(s)}(\mathbf{u})$, $s = 1, 2, \ldots$ — однородные полиномы от $\mathbf{u}$ степени s.

Рассмотрим первую форму разложения интеграла $\phi(\mathbf{u})$:

$$\phi_{(1)}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle.$$

Здесь $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ — постоянный вектор. Если приравнять в (В.3) линейные по $\mathbf{u}$ члены, то получим равенство

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle = 0, \tag{B.4}$$

которое должно выполняться для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.

Из (В.4) тогда следует, что вектор $\mathbf{b}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}^*$ ($(\ )^*$ — знак эрмитова сопряжения) с нулевым собственным значением, что противоречит условию $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Предположим теперь, что мы доказали, что $\phi_{(1)} \equiv \ldots \equiv \phi_{(s-1)} \equiv 0$. Тогда из уравнения (В.3) следует, что

$$\left\langle d\phi_{(s)}(\mathbf{u}), \mathbf{A}\mathbf{u} \right\rangle = 0. \tag{B.5}$$

Обозначим через $D^{(s)}\phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ s-й дифференциал функции ϕ в точке $\mathbf{v}$, вычисленный на векторе $\mathbf{u}$.

На основе формулы (В.5) можно сделать важное наблюдение: первая нетривиальная форма разложения интеграла системы (В.1) $\phi_{(s)}(\mathbf{u}) = D^{(s)}\phi(\mathbf{0}, \mathbf{u})$ является интегралом линеаризованной системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

Равенство (В.5) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \phi_{(s)}}{\partial u^j}(\mathbf{u}) u^j = 0. \tag{B.6}$$

Перепишем однородный полином $\phi_{(s)}(\mathbf{u})$ в виде суммы элементарных мономов:

$$\phi_{(s)}(u^1, \ldots, u^n) = \sum_{k_1 + \ldots + k_n = s} \phi_{k_1 \ldots k_n} (u^1)^{k_1} \ldots (u^n)^{k_n}.$$

Тогда (В.6) примет вид:

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n = s} (k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n)\, \phi_{k_1 \ldots k_n} (u^1)^{k_1} \ldots (u^n)^{k_n} = 0. \tag{B.7}$$

Из равенства (В.7) тогда следует, что если только коэффициент $\phi_{k_1 \ldots k_n} \neq 0$, то

$$k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n = 0,$$

что противоречит условию (В.2).

Лемма доказана.

Замечание В.2. Требование $\det \mathbf{A} \neq 0$ может быть на самом деле опущено, поскольку в действительности условие (В.2) отсутствия резонансов содержит в себе это требование.

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию. Пусть дана полуквазиоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{В.8}$$

Здесь нам будет более удобно использовать традиционные определения квазиоднородности и полуквазиоднородности 1.1.2 и 1.1.4, вводимые на основе техники многогранников Ньютона. Тогда элементы диагональной матрицы $\mathbf{G} = \alpha\mathbf{S}$, $\alpha = \dfrac{1}{q-1}$, $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$, $s_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \ldots, n$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$, определяющей квазиоднородную структуру, рациональны и неотрицательны.

Мы будем рассматривать две различные задачи:

а) если система (В.8) положительно полуквазиоднородна, мы исследуем вопрос о существовании у этой системы гладких интегралов, представимых в виде формальных нетривиальных рядов Маклорена

$$F(\mathbf{x}) = F(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0}^{\infty} F_{k_1 \ldots k_n} (x^1)^{k_1} \ldots (x^n)^{k_n}; \tag{В.9}$$

б) если система (В.8) отрицательно полуквазиоднородна, то мы будем искать полиномиальные интегралы, т. е. такие, для которых разложение (В.9) содержит лишь конечное число слагаемых.

Имеет место

Лемма В.2. *Если полуквазиоднородная система* (В.8) *имеет нетривиальный интеграл вида* (В.9)*, полиномиальный в случае отрицательной полуквазиоднородности, то соответствующая укороченная система имеет квазиоднородный интеграл.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай а). Функцию $F(\mathbf{x})$ можно считать положительно полуквазиоднородной и переразложить в ряд по квазиоднородным формам, отвечающим квазиоднородной структуре с матрицей $\mathbf{S}$:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} F_{N+m}(\mathbf{x}).$$

После замены $\mathbf{x} \mapsto \lambda^{\mathbf{S}}\mathbf{x}$ эта функция примет вид

$$F(\lambda^{\mathbf{S}}\mathbf{x}) = \lambda^N \sum_{m=0} \lambda^m F_{N+m}(\mathbf{x}).$$

Вне зависимости от знака полуквазиоднородности системы уравнений (B.8) после замены $\mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}$, $t \mapsto \mu^{-1}t$ она запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1} \mu^{\beta m}\mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}). \tag{B.10}$$

Здесь $\mu = \lambda^{\mathrm{q}-1}$, $\beta = \pm\alpha$, $\chi = \operatorname{sign}\beta$.

В случае а) при $\mu \to 0$ уравнение (B.10) превращается в укороченную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}). \tag{B.11}$$

Система (B.10) при любом $\mu \in (0, +\infty)$ имеет, очевидно, интеграл

$$F(\mathbf{x}, \mu) = F_N(\mathbf{x}) + \sum_{m=1} \mu^{\beta m} F_{N+\chi m}(\mathbf{x}), \tag{B.12}$$

(в случае а) $\chi = +1$) при $\mu \to 0+$ переходящий в квазиоднородную функцию

$$F_N(\mathbf{x}), \tag{B.13}$$

которая, в свою очередь, является интегралом укороченной системы (B.11).

Случай б) рассматривается аналогично. Полиномиальный интеграл $F(\mathbf{x})$ раскладывается в *конечную* сумму квазиоднородных форм, порожденных структурой с матрицей $\mathbf{G}$. Поэтому эту функцию можно считать отрицательно полуквазиоднородной, откуда получим соотношение

$$F(\lambda^{\mathbf{S}}\mathbf{x}) = \lambda^N \sum_{m=0}^{M} \lambda^{-m} F_{N-m}(\mathbf{x}), \quad N \geqslant M.$$

Система (B.10) и в случае б) имеет интеграл типа (B.12), разложение которого в ряд по степеням μ^{β}, $\beta = -\alpha$, правда, содержит лишь конечное число членов. Когда $\mu \to +\infty$, система (B.10) переходит в укороченную систему (B.11), а интеграл (B.12) в интеграл (B.13) укороченной системы.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь подробнее укороченную систему (B.11). Предположим, что эта система имеет частное решение в виде квазиоднородного (возможно комплексного) луча

$$\mathbf{x}_{(0)}(t) = t^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0, \tag{B.14}$$

где $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ — постоянный ненулевой вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Очевидно, что если $F_N(\mathbf{x})$ — интеграл системы (В.11), то $F_N(\mathbf{x}_0) = 0$. Вычислим матрицу Ковалевской для данного решения:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + d\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}_0).$$

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0.$$

Для простоты будем далее везде предполагать, что матрица Ковалевской приводится к диагональному виду.

Имеет место

Лемма В.3. *Пусть для любых наборов чисел* $(k_1 \ldots k_n)$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j \geqslant 1$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \rho_j \neq 0. \tag{В.15}$$

Тогда любой квазиоднородный интеграл укороченной системы (В.11) *тривиален.*

Доказательство. Пусть система (В.11) имеет нетривиальный квазиоднородный интеграл (В.13). После замены переменных

$$\mathbf{x} = t^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})$$

система уравнений (В.11) превратится в систему

$$t\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}), \tag{В.16}$$

где $\mathbf{K}$ — матрица Ковалевской, а $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u})$ ($\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $d\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) — векторное поле, вычисляемое по формуле

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - \mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}_0) - d\mathbf{f}_\mathrm{q}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}.$$

Если мы произведем логарифмическую замену времени $\tau = \ln t$, то система (B.16) превратится в систему

$$\mathbf{u}' = \mathbf{K}\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}), \tag{B.17}$$

где штрих означает производную по «логарифмическому времени» τ, аналогичную системе (B.1), рассмотренной в начале данного параграфа.

Однако, исходный *автономный* интеграл (B.13) системы (B.11) превратился в *зависящий от времени* интеграл системы (B.17):

$$F_N(\mathbf{x}) = e^{-\alpha N\tau} F_N(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}).$$

Введем вспомогательную переменную $u^0 = e^{-\alpha\tau}$ и рассмотрим расширенную систему уравнений

$$u^{0\prime} = -\alpha u^0, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{K}\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}). \tag{B.18}$$

Если квазиоднородная система (B.11) имеет нетривиальный квазиоднородный интеграл (B.13), то автономная расширенная система (B.18) имеет нетривиальный *автономный* интеграл

$$\phi(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^N F_N(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}).$$

Тогда в силу леммы B.1 существует набор таких целых неотрицательных чисел $(k_0^*, k_1^*, \ldots, k_n^*)$, $\sum\limits_{j=0}^{n} k_j^* \geqslant 1$, что

$$-\alpha N k_0^* + \sum_{j=1}^{n} k_j^* \rho_j = 0. \tag{B.19}$$

Согласно лемме 1.1.2 $\rho = -1$ всегда является собственным числом матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$, поэтому без ограничения общности мы можем считать, что первое собственное число ρ_1 этой матрицы равно -1. Перепишем равенство (B.19) в виде

$$-1(Nk_0^* + (q-1)k_1^*) + (q-1)\sum_{j=2}^{n} k_j^* \rho_j = 0.$$

Однако, в силу условий леммы (см. (B.15)) выполнение этого равенства невозможно. Получили противоречие.

Лемма доказана.

При доказательстве леммы B.3 мы неявно использовали (опираясь на лемму B.1) один факт, который понадобится нам в дальнейшем.

Замечание B.3. Пусть укороченная система (B.8) имеет нетривиальный квазиоднородный интеграл $F_N(\mathbf{x})$. Тогда линейная система

$$\mathbf{u}^{0\prime} = -\alpha \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{K}\mathbf{u} \tag{B.20}$$

имеет однородный интеграл вида

$$\phi_{(s+N)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^N D^{(s)} F_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}),$$

где $s \geqslant 1$ — натуральное число такое, что

$$D^{(p)} F_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \equiv 0, \quad p = 1, \ldots, s, \quad D^{(s)} F_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \not\equiv 0.$$

В последовательном применении лемм B.2 и B.3 состоит доказательство следующей теоремы о неинтегрируемости.

Теорема B.4. *Пусть система* (B.8) *с бесконечно дифференцируемой правой частью полуквазиоднородна относительно некоторой структуры с диагональной матрицей* $\mathbf{G}$, *имеющей рациональные неотрицательные элементы. Пусть* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *— собственные числа диагонализируемой матрицы Ковалевской, вычисленной на одном из решений укороченной системы* (B.11) (*возможно комплексном*). *Пусть для любого набора чисел* $(k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j \geqslant 1$ *имеет место неравенство* (B.15). *Тогда система* (B.8) *не имеет ни одного полиномиального интеграла. Если же система* (B.8) *положительно полуквазиоднородна, то* (B.8) *не имеет также ни одного бесконечно дифференцируемого интеграла, представимого в виде нетривиального формального ряда Маклорена* (B.9).

Гораздо сложнее и интереснее проблема интегрируемости становится в случае, когда система (B.8) имеет нетривиальный интеграл. Вопрос ставится обычно следующим образом: существуют ли в заданном классе другие интегралы, функционально независимые с данным?

Прежде всего приведем следующий результат, сформулированный и доказанный в работе [201].

Лемма B.4. *Предположим, что квазиоднородная система* (B.11) *имеет квазиоднородный интеграл* (B.13), *невырожденный на некотором частном решении этой системы типа квазиоднородного луча* $\mathbf{x}_{(0)}(t) = t^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0$, *т. е.* $dF_N(\mathbf{x}_0) \neq 0$. *Пусть* $Q = \alpha N$ *— рациональная квазиоднородная «степень» этого интеграла* ($F_N(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \mu^Q F_N(\mathbf{x})$). *Тогда* Q *является одним из собственных чисел матрицы Ковалевской.*

Этот результат достаточно важен и интересен, и мы приведем его.

Доказательство. Введем обозначение:

$$\mathbf{b} = dF_N(\mathbf{x}_0).$$

Тогда вспомогательная система (В.18) имеет интеграл, который может быть разложен в ряд по однородным формам переменных $(u^0, \mathbf{u})$:

$$\phi(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^N F_N(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{(s)}(u^0, \mathbf{u}),$$

где

$$\phi_{(1)}(u^0, \mathbf{u}) \equiv \ldots \equiv \phi_{(N)}(u^0, \mathbf{u}) \equiv 0, \quad \phi_{(N+1)}(u^0, \mathbf{u}) \equiv (u^0)^N \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle.$$

В соответствии с замечанием В.3 форма $\phi_{(N+1)}(u^0, \mathbf{u})$ является интегралом линейной системы (В.20), откуда немедленно следует, что для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\big\langle \mathbf{b}, (\mathbf{K} - \alpha N \mathbf{E})\mathbf{u} \big\rangle = 0.$$

Поскольку по предположению матрица $\mathbf{K}$ диагонализируема, из последнего соотношения следует, что вектор $\mathbf{b}$ является ее собственным вектором с собственным значением Q.

Лемма доказана.

Выше мы условились, что $\rho_1 = -1$ — первое собственное число матрицы Ковалевской с собственным вектором $\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0)$. Без ограничения общности можно предположить, что вектор $\mathbf{p}$ параллелен первому базисному вектору $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Используя лемму В.4, можно считать, что $\rho_N = Q$ — *последнее* собственное число матрицы Ковалевской, и что $\mathbf{b}$ параллелен *последнему* базисному вектору $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Таким образом, одно из резонансных соотношений, которым удовлетворяют собственные числа матрицы Ковалевской в этом случае, имеет вид

$$-k_1 + Qk_n = 0, \quad k_1 = r, \quad k_n = p,$$

где $Q = \frac{p}{r}$ — представление числа Q в виде несократимой дроби.

Имеет место следующий результат о неинтегрируемости систем типа (В.8), основанный на арифметических свойствах матрицы Ковалевской.

Теорема В.5. *Пусть система* (В.8) *с бесконечно дифференцируемой правой частью, полуквазиоднородная относительно некоторой структуры с диагональной матрицей* $\mathbf{G}$ *с рациональными неотрицательными элементами, имеет нетривиальный интеграл* $F(\mathbf{x})$*, полиномиальный в случае* *отрицательной полуквазиоднородности системы или бесконечно дифференцируемый, представимый в виде формального нетривиального ряда Маклорена, в случае положительной полуквазиоднородности системы. Пусть квазиоднородное укорочение этого интеграла $F_N(\mathbf{x})$ невырождено на одном из решений укороченной системы* (B.11) *типа луча. Пусть также матрица Ковалевской* $\mathbf{K}$*, вычисленная на этом решении, диагонализируема, а ее первые $n-1$ собственных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ таковы, что для любого набора целых* (*возможно отрицательных*!) *чисел* $(k_1, \ldots, k_{n-1})$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{j=1}^{n-1} |k_j| \neq 0$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j \rho_j \neq 0. \tag{B.21}$$

Тогда любой другой интеграл $G(\mathbf{x})$ системы (B.8)*, полиномиальный в случае отрицательной полуквазиоднородности и представимый в виде формального степенного ряда в случае положительной полуквазиоднородности, функционально зависим с $F(\mathbf{x})$, т. е. существует гладкая функция $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$G(\mathbf{x}) = H(F(\mathbf{x})). \tag{B.22}$$

Доказательство основано на использовании нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма B.5. *Пусть система* (B.8) *имеет гладкий интеграл $F(\mathbf{x})$, и предположим, что любой нетривиальный квазиоднородный интеграл $G_K(\mathbf{x})$* ($G_K(\lambda^{\mathbf{S}}\mathbf{x}) = \lambda^K G_K(\mathbf{x})$) *укороченной системы* (B.11) *является функцией от укорочения $F_N(\mathbf{x})$ интеграла $F(\mathbf{x})$, т. е.*

$$G_K(\mathbf{x}) = \Phi\bigl(F_N(\mathbf{x})\bigr) \tag{B.23}$$

(*функция $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, вообще говоря, может быть лишь элементарным мономом*). *Тогда любой нетривиальный интеграл $G(\mathbf{x})$ системы* (B.8) *является гладкой функцией от $F(\mathbf{x})$* (*см.* (B.22)).

Доказательство. Сделав в (B.10) замену параметра $\varepsilon = \mu^{\beta}$, запишем ее в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{f}_{\mathrm{q}+\chi m}(\mathbf{x}). \tag{B.24}$$

При $\varepsilon \to 0$ система (B.24) превращается в укороченную систему (B.11). Система (B.24) имеет интеграл вида

$$F(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m F_{N+\chi m}(\mathbf{x}), \tag{B.25}$$

при $\varepsilon \to 0$ превращающийся в интеграл укороченной системы (B.11).

Если (B.8) имеет дополнительный интеграл $G(\mathbf{x})$, то (B.24) также имеет дополнительный интеграл вида, аналогичного (B.25):

$$G(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m G_{K+\chi m}(\mathbf{x}), \tag{B.26}$$

Интеграл (B.26) при $\varepsilon \to 0$ переходит в укорочение $G_K(\mathbf{x})$, которое является интегралом системы (B.11).

Функция переменных $\mathbf{x}, \varepsilon$

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = G^{(0)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \Phi^{(0)}\big(F(\mathbf{x}, \varepsilon)\big),$$

где введены обозначения $G^{(0)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = G(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\Phi^{(0)}(F) = \Phi(F)$, также является интегралом (B.24) и, в силу (B.23), имеет первый порядок малости по ε.

Рассмотрим следующую функцию

$$G^{(1)}_{K_1}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} G^{(1)}(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Поскольку интегралы (B.25), (B.26) представляют собой степенные ряды, коэффициенты которых являются квазиоднородным функциями, $G^{(1)}_{K_1}(\mathbf{x})$ также квазиоднородная функция некоторой степени K_1 ($G^{(1)}_{K_1}(\lambda^{\mathbf{S}}\mathbf{x}) = \lambda^{K_1} G^{(1)}_{K_1}(\mathbf{x})$) и является интегралом (B.11). Но тогда

$$G^{(1)}_{K_1}(\mathbf{x}) = \Phi^{(1)}\big(F_N(\mathbf{x})\big),$$

где $\Phi^{(1)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция.

Функция

$$G^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = G^{(1)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \Phi^{(1)}\big(F(\mathbf{x}, \varepsilon)\big)$$

является интегралом (B.24) и имеет второй порядок малости по ε.

Но тогда

$$G^{(2)}_{K_1}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} G^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

будет квазиоднородным интегралом укороченной системы (B.11), откуда следует, что

$$G^{(2)}_{K_2}(\mathbf{x}) = \Phi^{(2)}\big(F_N(\mathbf{x})\big)$$

для некоторой гладкой функции $\Phi^{(2)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Повторяя этот процесс до бесконечности, получим, что

$$G(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)}\big(F(\mathbf{x})\big).$$

Но это означает, что существует такая функция $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что имеет место (B.22).

Лемма доказана.

Если система (B.8) имеет дополнительный интеграл $G(\mathbf{x})$, то, согласно замечанию B.3, линейная система (B.20) имеет два однородных интеграла

$$\phi_{(N+1)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^N \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle, \quad \psi_{(s+K)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^K \varphi_{(s)}(\mathbf{u}),$$

$$\varphi_{(s)}(\mathbf{u}) = D^{(s)} G_K(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}).$$

Как уже отмечалось, можно считать, что первый базисный вектор $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ является собственным вектором матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ с первым собственным значением $\rho_1 = -1$. При этом предположении верна

Лемма B.6. *Интеграл* $\psi_{(s+K)}(u^0, \mathbf{u})$ *линейной системы* (B.20) *не зависит от переменной* u^1.

Доказательство. Рассмотрим квазиоднородный интеграл $G_K(\mathbf{x})$ укороченной системы (B.11), и через $\dot G_K(\mathbf{x})$ обозначим его полную производную по времени в силу системы (B.11)

$$\dot G_K(\mathbf{x}) = \big\langle dG_K(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x})\big\rangle.$$

При сделанных выше предположениях относительно гладкости векторного поля $f(\mathbf{x})$ и свойствах матрицы $\mathbf{G}$, определяющей квазиоднородную структуру, $\dot G_K(\mathbf{x})$ является полиномом по $\mathbf{x}$, *тождественно* равным нулю. Поэтому (согласно правилу Лейбница) для любого натурального j

$$D^{(j)} \dot G_K(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{j} C^i_j \big\langle D^{(j-1)}(d\dot G_K)(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}), D^{(j)}\mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})\big\rangle \equiv 0,$$

где $C^i_j = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$.

Поскольку дифференциальные операторы D и d, очевидно, перестановочны, то, выбирая $j = s$, где s — минимальный номер, для которого $D^{(s)}G_K(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \not\equiv 0$, получим

$$D^{(s)}\dot{G}_K(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \big\langle d\big(D^{(s)}\dot{G}_K(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})\big), \mathbf{f}_{\mathrm{q}}(\mathbf{x}_0)\big\rangle = \big\langle d\varphi_{(s)}(u), \mathbf{p}\big\rangle \equiv 0.$$

Откуда с учетом того, что $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_1 = (p, 0, \ldots, 0)$, получим

$$\frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial u^1}(\mathbf{u}) \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Как обсуждалось выше, можно предположить, что $\mathbf{b} = (0, \ldots, 0, b)$ является собственным вектором матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ с собственным значением $\rho_n = Q$. Имеет место

Лемма B.7. *Пусть квазиоднородный интеграл $F_N(\mathbf{x})$ укороченной системы* (B.11) *невырожден на решении этой системы* (B.14)*, т. е. $dF_N(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Если эта система имеет квазиоднородный интеграл $G_K(\mathbf{x})$, функционально независимый с $F_N(\mathbf{x})$, то линейная система* (B.20) *имеет нетривиальный однородный интеграл $\widetilde{\psi}_{l+R}(u^0, \mathbf{u})$, не зависящий от u^1 и u^n, следующего вида*:

$$\widetilde{\psi}_{l+R}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^R \widetilde{\varphi}_{(l)}(u^2, \ldots, u^{n-1}), \tag{B.27}$$

где R — некоторое целое (*возможно отрицательное*) *число, а $\widetilde{\varphi}_{(l)}$ — однородная форма переменных $u^2, \ldots, u^n$ целой положительной степени l.*

Доказательство. Перепишем интеграл $\psi_{l+R}(u^0, \mathbf{u})$ в следующем виде:

$$\psi_{s+K}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^K \sum_{j=0}^{s} \widetilde{\varphi}_{(s-j)}(u^2, \ldots, u^{n-1})(u^n)^j, \tag{B.28}$$

где $\widetilde{\varphi}_{(s-j)}$ — однородные формы своих аргументов степеней $s - j$.

Интеграл системы (B.20) имеет вид:

$$\phi_{(N+1)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^N \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle = b(u^0)^N u^n \equiv c = \mathrm{const}.$$

Поэтому (B.28) можно переписать в виде

$$\psi(u^0, \mathbf{u}, c) = \sum_{j=0}^{s} (u^0)^{K-jN} \widetilde{\varphi}_{(s-j)}(u^2, \ldots, u^{n-1}) \left(\frac{c}{b}\right)^j.$$

Поскольку постоянная c произвольна, каждый коэффициент

$$\widetilde{\psi}_{\left(s+K-(N+1)j\right)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^{K-jN} \widetilde{\varphi}_{(s-j)}(u^2, \ldots, u^{n-1})$$

при $\left(\dfrac{C}{b}\right)^j$ является интегралом системы (В.20), имеющим требуемую форму.

Однако, теоретически возможна ситуация, когда все однородные полиномы $\widetilde{\varphi}_{(s-j)}$, $j = 0, \ldots, s-1$ тождественно равны нулю, т. е. интеграл (В.28) системы (В.20) имеет форму

$$\psi_{(s+K)}(u^0, \mathbf{u}) = a_s (u^0)^K (u^n)^s.$$

Поскольку $Q = \alpha N$ — последнее собственное число матрицы Ковалевской, то отсюда немедленно следует, что

$$K = sN.$$

Рассмотрим другой интеграл укороченной системы (В.11):

$$G_K^*(\mathbf{x}) = G_K(\mathbf{x}) = \frac{a_s}{s!} \left(b^{-1} F_N(\mathbf{x})\right)^s,$$

который также является квазиоднородной функцией степени K.

Разложение Тейлора функции $G_K^*(\mathbf{x})$ в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ начинается с членов по крайней мере $(s+1)$-го порядка малости, поэтому линейная система (В.20) имеет однородный интеграл вида

$$\psi^*_{(s_1+K)}(u^0, \mathbf{u}) = (u^0)^K \varphi^*_{(s_1)}(\mathbf{u}),$$
$$\varphi^*_{(s_1)}(\mathbf{u}) = D^{(s_1)} G_K^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}), \quad s < s_1 < +\infty.$$

С этим интегралом можно проделать описанную выше процедуру. Если этот интеграл также имеет форму

$$\psi^*_{(s_1+K)}(u^0, \mathbf{u}) = a_{s_1} (u^0)^K (u^n)^{s_1},$$

то

$$K = s_1 N,$$

что противоречит условию $s_1 > s$.

Если же $s_1 = +\infty$, то $G_K^*(\mathbf{x}) \equiv 0$. Это означает, что $G_K(\mathbf{x})$ является функцией $F_N(\mathbf{x})$. Получили противоречие.

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы В.5. Если укороченная система (В.11) имеет квазиоднородный интеграл $G_K(\mathbf{x})$, функционально независимый с $F_N(\mathbf{x})$, то в соответствии с леммами В.6, В.7 линейная система (В.20) обладает нетривиальным интегралом вида (В.27). Тогда функция $\widetilde{\varphi}_{(l)}(u^2, \ldots, u^{n-1})$ должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка

$$-\alpha R \widetilde{\varphi}_{(l)}(\mathbf{u}) + \left\langle d\widetilde{\varphi}_{(l)}(\mathbf{u}), \mathbf{K}\mathbf{u} \right\rangle = -\alpha R \widetilde{\varphi}_{(l)}(\mathbf{u}) + \sum_{j=2}^{n-1} \rho_j u^j \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{(l)}}{\partial u^j}(\mathbf{u}) = 0. \tag{В.29}$$

Записывая, как и ранее, однородную функцию $\widetilde{\varphi}_{(l)}(u^2, \ldots, u^{n-1})$ в виде суммы элементарных мономов

$$\widetilde{\varphi}_{(l)}(u^2, \ldots, u^{n-1}) = \sum_{k_2 + \ldots + k_{n-1} = l} \widetilde{\varphi}_{k_2 \ldots k_{n-1}} (u^2)^{k_2} \ldots (u^{n-1})^{k_{n-1}},$$

из уравнения (В.29) получим, что для любого ненулевого коэффициента данного разложения $\widetilde{\varphi}_{k_2 \ldots k_{n-1}}$ должно иметь место резонансное соотношение

$$-R + (q-1) \sum_{j=2}^{n-1} k_j \rho_j = 0,$$

которое может быть интерпретировано как условие вида (В.21), поскольку $\rho_1 = -1$.

Для завершения доказательства теоремы нужно применить лемму В.5.

Теорема доказана.

К сожалению, полученный результат неприменим к гамильтоновым системам, наиболее часто рассматриваемым в механике. Как показано в работе [201], гамильтоновость системы влечет за собой резонансы специального вида между *парами* собственных чисел матрицы Ковалевской. С другой стороны, из результатов работы [64] следует, что эти резонансы являются не столько следствием наличия интеграла — функции Гамильтона, сколько следствием наличия инвариантной меры. Применим полученные результаты к конкретным системам уравнений.

Пример В.5. Рассмотрим двумерную логистическую систему [32]

$$\dot{x} = x(a + cx + dy), \quad \dot{y} = y(b + ex + fy) \tag{В.30}$$

и найдем арифметические условия, которым должны удовлетворять коэффициенты (В.30), чтобы рассматриваемая система не имела бы гладких интегралов, представимых в виде нетривиальных формальных рядов Маклорена в окрестности начала координат $x = y = 0$.

Разумеется, эта автономная двумерная система с аналитическими правыми частями не может демонстрировать хаотического поведения, и в определенном смысле является интегрируемой. Однако, при выполнении некоторых условий интегралы этой системы будут в том или ином смысле «плохими».

Прежде всего, как следует из леммы В.1, (В.30) не имеет интегралов, которые могут быть записаны в виде формальных степенных рядов по x, y, если для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 + k_2 \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$k_1 a + k_2 b \neq 0,$$

которое можно переписать в виде

$$-\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}^+.$$

С другой стороны, система (В.30) является отрицательно полуоднородной. Ее укорочение

$$\dot{x} = x(cx + dy), \quad \dot{y} = y(ex + fy) \tag{В.31}$$

является однородной системой степени 2.

Укороченная система (В.31) имеет прямолинейное решение в виде луча

$$x_{(0)}(t) = \frac{x_0}{t}, \quad x_{(0)}(t) = \frac{y_0}{t}, \quad x_0 = \frac{d-f}{cf-ed}, \quad y_0 = \frac{e-c}{cf-ed},$$

если $cf - ed \neq 0$.

Нетрудно подсчитать собственные числа матрицы Ковалевской:

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = \rho = \frac{(d-f)(e-c)}{cf-ed}.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой В.4 система (В.30) не имеет полиномиальных интегралов, если

$$k_1 \neq k_2 \rho$$

для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 + k_2 \geqslant 1$ или

$$\frac{(d-f)(e-c)}{cf-ed} \notin \mathbb{Q}^+.$$

Пример B.6. Рассмотрим систему уравнений, описывающую возмущенный орегонатор [195]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - xy + x - \varepsilon xz - bx^2),\\ \dot{y} &= a^{-1}(-y - xy + cz),\\ \dot{z} &= d(x - \varepsilon xz - z). \end{aligned} \tag{B.32}$$

Эта система уравнений описывает некоторую гипотетическую химическую реакцию типа Белоусова–Жаботинского, где переменные x, y, z означают концентрации реагентов, а постоянные a, b, c, d, ε — параметры реакции, $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Хронологически сначала была рассмотрена невозмущенная реакция ($\varepsilon = 0$) [159]. Оказалось, что даже при очень малых значениях ε поведение возмущенной системы резко отличается от поведения невозмущенной. Было обнаружено, что в системе (B.32) возможны хаотические режимы.

Найдем арифметические соотношения, выполнение которых гарантировало бы, что система (B.32) не имеет полиномиальных интегралов или интегралов, представимых в виде формальных рядов Маклорена.

Явные формулы для собственных чисел матрицы системы линейного приближения весьма громоздки, поэтому лемма B.1 в качестве средства для доказательства неинтегрируемости здесь мало полезна.

Применим теорему B.4. Система (B.32) отрицательно полуквазиоднородна. Ее укорочение

$$\dot{x} = -ax(y + bx), \quad \dot{y} = -a^{-1}xy, \quad \dot{z} = dx(1 - \varepsilon z) \tag{B.33}$$

является квазиоднородной системой степени $q = 2$ с показателями $s_x = s_y = 1$, $s_z = 0$.

Система (B.33) имеет действительное частное решение типа квазиоднородного луча:

$$x_{(0)}(t) = \frac{x_0}{t}, \quad y_{(0)}(t) = \frac{y_0}{t}, \quad z_{(0)}(t) = z_0,$$
$$x_0 = a, \quad y_0 = a^{-1} - ab, \quad z_0 = \varepsilon^{-1}.$$

Собственные числа матрицы Ковалевской следующие:

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = 1 - a^2 b, \quad \rho_3 = -ad\varepsilon.$$

По теореме B.4 система уравнений (B.32) не имеет полиномиальных интегралов, если

$$-k_1 + (1 - a^2 b)k_2 - ad\varepsilon k_3 \neq 0,$$

где $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 + k_2 + k_3 \geqslant 1$.

Пример В.7. В качестве примера, иллюстрирующего теорему В.5, рассмотрим проблему интегрируемости уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли [182], изучаемых в различных областях математической физики. В западной литературе эти уравнения также часто называют уравнениями Пуанкаре – Арнольда в связи с работой В. И. Арнольда [144]. Они являются естественным обобщением знаменитых динамических уравнений Эйлера, описывающих движение по инерции твердого тела с одной неподвижной точкой. Эти уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{m}_l = \sum_{i,j=1}^{n} C_{il}^{j} \omega^i m_j, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{B.34}$$

Постоянные $\{C_{il}^j\}_{i,j,l=1}^n$ — так называемые структурные константы некоторой n-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ — вектор «угловой скорости», связанный с ковектором моментов $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ следующим образом:

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} I_{ij} \omega^i,$$

где $\{I_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — положительно определенный симметричный тензор типа $(0, 2)$, аналогичный тензору инерции для обыкновенного твердого тела.

В обычной ситуации движения твердого тела $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$.

Уравнения (В.34) всегда имеют «интеграл энергии»:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} I_{ij} \omega^i \omega^j. \tag{B.35}$$

Как обычно, возникает вопрос, имеют ли уравнения (В.34) дополнительные интегралы, функционально независимые с (В.35). Этой проблеме, а также смежным вопросам посвящено достаточно много работ (см., например, монографии [63, 107, 160], а также цитируемую в них литературу). В работах [60, 63] изучался близкий вопрос о существовании интегрального инварианта (инвариантной меры с бесконечно гладкой положительной плотностью) для уравнений (В.34). Для низких размерностей в цитируемой работе на поставленный вопрос дан исчерпывающий ответ. Оказалось, что для $n = 3$ только *разрешимые* алгебры Ли поставляют нам примеры систем уравнений Эйлера – Пуанкаре без интегральных инвариантов. Вполне возможно, что разрешимость алгебры $\mathfrak{g}$ может оказаться препятствием к интегрируемости.

Итак, мы ограничимся случаем разрешимых алгебр при $n = 3$.

Согласно [40] существует канонический базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ такой, что единственными ненулевыми структурными константами C_{il}^j являются

$$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = \alpha, \quad C_{13}^2 = C_{31}^2 = \beta, \quad C_{23}^1 = -C_{32}^1 = \gamma, \quad C_{23}^2 = C_{32}^2 = \delta.$$

Мы наложим на структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ также условие невырожденности:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Для того, чтобы сохранить аналогию с динамикой твердого тела, «угловую скорость» обозначим как $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$. Для «тензора инерции» $\mathbf{I}$ и ему обратного $\mathbf{I}^{-1}$ введем следующие обозначения:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

Через $\mathbf{m} = (x, y, z)$ обозначим вектор «момента количества движения». Тогда соответствующие уравнения Эйлера–Пуанкаре имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r(\alpha x + \beta y), \\ \dot{y} &= -r(\gamma x + \delta y), \\ \dot{z} &= p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x + \delta y), \end{aligned} \tag{B.36}$$

где $p = ax + dy + ez$, $q = dx + by + fz$, $r = ex + fy + cz$.

Интеграл энергии может быть записан следующим образом

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(xp + yq + zr) = \\ &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr) = \\ &= \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz). \end{aligned} \tag{B.37}$$

Система (В.36) является однородной с квадратичной правой частью, поэтому ее можно рассматривать и как квазиоднородную, и как полуквазиоднородную. Интеграл (В.37), разумеется, невырожден на любом векторе (x_0, y_0, z_0).

Можно относительно просто доказать, что уравнения (В.36) имеют прямолинейное частное решение в виде луча

$$x_{(0)}(t) = \frac{x_0}{t}, \quad y_{(0)}(t) = \frac{y_0}{t}, \quad z_{(0)}(t) = \frac{z_0}{t},$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторые, вообще говоря, комплексные числа, и $|x_0|^2 + |y_0|^2 + |z_0|^2 \neq 0$. Однако, для того, чтобы вычислить собственные числа матрицы Ковалевской, необходимо применить следующий технический трюк. Матрица $\mathbf{K}$ в общем случае имеет вид:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 - eX - \alpha w & -fX - \beta w & -cX \\ -eY - \gamma w & 1 - fY - \delta w & -cY \\ aX + dY + \alpha u + \gamma v & dX + bY + \beta u + \delta v & 1 + eX + fY \end{pmatrix},$$

где введены обозначения

$$u = ax_0 + dy_0 + ez_0, \quad v = dx_0 + by_0 + fz_0, \quad w = ex_0 + fy_0 + cz_0,$$
$$X = \alpha x_0 + \beta y_0, \quad Y = \gamma x_0 + \delta y_0.$$

Поскольку уравнения (В.36) имеют квадратичный интеграл энергии (В.37), нам *a priori* известны *два* корня характеристического полинома $\Delta_K(\rho)$:

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_3 = 2.$$

Следовательно, квадратный трехчлен

$$P(\rho) = \rho^2 - \rho - 2$$

делит многочлен $\Delta_K(\rho)$ нацело.

Учитывая вид матрицы $\mathbf{K}$, можно вычислить остаток от деления $\Delta_K(\rho)$ на $P(\rho)$

$$Q(\rho) = \rho - 2 + (\alpha + \delta)w.$$

Следовательно,

$$\rho = \rho(w) = 2 - (\alpha + \delta)w,$$

поэтому, для нахождения ρ_2, нам достаточно вычислить величину w.

Для этого следует обратить внимание, что уравнения для определения x_0, y_0 имеют «почти» замкнутую форму:

$$(1 - \alpha w)x_0 - \beta w y_0 = 0, \quad -\gamma w x_0 + (1 - \delta w)y_0 = 0.$$

Эта линейная однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Отсюда получаем

$$w = \frac{1}{2}\frac{\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{\alpha\delta - \beta\gamma}. \tag{В.38}$$

Если

$$\rho(w) \in \mathbb{Q},$$

где величина w задастся равенствами (В.38), то собственные числа матрицы Ковалевской не удовлетворяют резонансным соотношениям типа (В.24), и уравнения Эйлера–Пуанкаре (В.36) не имеют интеграла, представимого в виде формального нетривиального степенного ряда относительно x, y, z или p, q, r, функционально независимого с (В.37).

Рассмотрим два интересных частных случая. Пусть $\alpha = \delta = 0$. Тогда

$$\rho_2 = 2,$$

и система (В.36) становится подозрительной на интегрируемость.

Действительно, в этом случае дополнительный первый интеграл очевиден:

$$G = \frac{1}{2}(\gamma x^2 - \beta y^2).$$

Интересно отметить, что если $\beta\gamma < 0$, то, как показано в [60, 63], рассматриваемая система имеет интегральный инвариант (группа Ли, порождающая алгебру $\mathfrak{g}$, унимодулярна). Если, напротив, $\beta\gamma > 0$, то интегрального инварианта нет, но существует инвариантная мера, плотность которой имеет как угодно большой (но конечный) порядок гладкости.

Пусть теперь $\beta = \gamma = 0$. Тогда

$$\rho_2 = 1 - \frac{\alpha}{\delta} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{\delta}{\alpha},$$

и условие неинтегрируемости имеет вид

$$\frac{\alpha}{\delta} \notin \mathbb{Q}.$$

Как следует из [60, 63], если $a\delta$ >0, система Эйлера–Пуанкаре (В.36) не обладает инвариантной мерой даже с суммируемой плотностью.

В работе [45] изучались уравнения Эйлера–Пуанкаре на многомерных разрешимых алгебрах Ли. Показано, что независимо от структуры тензора инерции для типичных ненильпотентных разрешимых алгебр Ли общее решение уравнений Эйлера–Пуанкаре ветвится на плоскости комплексного времени.

В завершение кратко обсудим полученные в теоремах В.4 и В.5 условия неинтегрируемости и сравним их с критерием Иошиды [201].

В соответствии с критерием Иошиды, если хотя бы одно из собственных чисел матрицы Ковалевской не является рациональным, квазиоднородная система дифференциальных уравнений *алгебраически неинтегрируема*. Это утверждение допускает комплексно-аналитическую интерпретацию в духе работы С. Л. Зиглина [43]. Основная идея этой работы заключается в том, что ветвление решений в комплексной плоскости является препятствием к интегрируемости. Рассмотрим фуксову систему линейных дифференциальных уравнений, получающуюся из системы (В.16) линеаризацией в окрестности $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$t\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{u}. \tag{B.39}$$

Оператор монодромии, действующий на пространстве решений этой системы, имеет следующую матрицу

$$\mathbf{M} = \exp(2\pi i\mathbf{K}),$$

которая в случае выполнения критерия Иошиды не может быть рациональным корнем из единичной матрицы $\mathbf{E}$.

Это означает, что система (В.39) имеет частные решения с бесконечнолистной римановой поверхностью. Если же выполнены неравенства (В.15) или (В.21), то пространство решений системы (В.39) имеет еще более сложную структуру.

Как следует из леммы В.4, любой набор из $n-1$ квазиоднородных интегралов укороченной системы (В.11) функционально зависим в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при выполнении критерия Иошиды. Однако неясно, и это отмечено в работе [163], может ли эта область зависимости быть расширена. Условия теорем В.4 и В.5 налагают существенно более жесткие требования на свойства собственных чисел матрицы Ковалевской, что позволяет сформулировать более сильные утверждения о неинтегрируемости.

Литература

[1] Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — Харьков: ОНТИ, 1939.

[2] Аппельрот Г. Г. *По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe»*. Математ. сборник. — 1892. — Т. 16. — Вып. 1. — С. 483–507, 592–596.

[3] Арнольд В. И. *Алгебраическая неразрешимость проблем устойчивости по Ляпунову и топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений*. Функц. анализ и его прилож. — 1979. — № 4. — Вып. 3. — С. 1–9.

[4] Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Наука, 1978.

[5] Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике*. — УМН, 1963. — Т. 18. — № 6. — С. 91–192.

[6] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1989.

[7] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Динамические системы — 1. Итоги науки и техники, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — М.: ВИНИТИ, 1985.

[8] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. — М.: УРСС, 2002.

[9] Бардин Б. С. *О движениях спутника, асимптотических к его регулярным прецессиям*. — Космич. исследования. — 1991. — Т. 29. — Вып. 6. — С. 822–827.

[10] Бардин Б. С. *Об асимптотических решениях гамильтоновых систем при резонансе первого порядка*. — ПММ. — 1991. — Т. 55. — Вып. 4. — С. 587–593.

[11] Белага Э. Г. *О проводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно периодического движения*. — ДАН СССР, 1962. — Т. 143. — № 2. — С. 255–258.

[12] Белицкий Г. Р. *Нормальные формы, инварианты и локальные отображения*. — Киев: Наукова думка, 1979.

[13] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1954.

[14] Бибиков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Высшая школа, 1991.

[15] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы.* — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.

[16] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* — М.: Гостехиздат, 1955.

[17] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Смойленко А. М. *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.* — Киев: Наукова думка, 1969.

[18] Богоявленский А. А. *О некоторых частных решениях задачи движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.* — ПММ. — 1958. — Т. 22. — Вып. 6. — С. 739–749.

[19] Богоявленский А. А. *О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.* — ПММ. — 1958. — Т. 22. — Вып. 5. — С. 622–645.

[20] Болотин С. В., Негрини П. *Асимптотические траектории гироскопических систем.* Вестн. МГУ, сер., I. Математика. Механика. — 1993. — № 6. — С. 66–75.

[21] Боль П. Г. *Избранные труды.* — Рига: Зинатне, 1974.

[22] Брюно А. Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений* I, II. Труды Моск. мат. общества. — 1971. — Т. 25. — С. 119–262; 1972. — Т. 26. — С. 199–239.

[23] Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* — М.: Наука, 1979.

[24] Брюно А. Д. *Об устойчивости в системе Гамильтона.* — Препринт № 7 Ин-та прикл. матем. — Ан СССР, 1985.

[25] Брюно А. Д. *Степенные асимптотики решений не линейных систем.* — Изв. АН СССР, сер. мат. — 1965. — Т. 29. — № 2. — С. 329–364.

[26] Бугаев Н. В. *Начало наибольших и наименьших показателей в теории дифференциальных уравнений. Целые и частные интегралы.* Математ. сборник. — 1982. — Т. 16. — Вып. 1. — С. 9–80.

[27] Булатович Р., Кажич М. *Об асимптотических решениях уравнений движения неголономных систем Чаплыгина.* Mathematica Montesnigri. — 1993. — Vol. II. — P. 11–20.

[28] Быков Я. В. *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений.* — Фрунзе: Изд-во «АН КиргССР», 1957.

[29] Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1968.

[30] Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра.* — М.: Наука, 1979.

[31] Веретенников В. Г. *Устойчивость и колебания нелинейных систем.* — М.: Наука, 1984.

[32] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование.* — М.: Наука, 1976.

[33] Вуйичич В. А., Козлов В. В. *К задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния.* — ПММ. — 1991. — Т. 55. — Вып. 4. — С. 555–559.

[34] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1988.

[35] Гилмор Р. *Прикладная теория катастроф* I, II. — М.: Мир, 1985.

[36] Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

[37] Гродзенский С. Я. *Андрей Андреевич Марков*, 1856–1922. — М.: Наука, 1987.

[38] Громак В. И. *О решениях второго уравнения Пенлеве.* — Дифференц. уравн. — 1982. — Т. 18. — № 5. — С. 753–163.

[39] Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* — М.: Наука, 1967.

[40] Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* — М.: ИЛ, 1964.

[41] Дубошин Г. Н. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы.* — М.: Наука, 1964.

[42] Зигель К. *Лекции по небесной механике.* — М.: ИЛ, 1959.

[43] Зиглин С. Л. *Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике*, I, II. — Функц. анализ и его прилож. — 1982. — Т. 16. — Вып. 3. — С. 30–41; 1983. — Т. 17. — Вып. 1. — С. 8–23.

[44] Зубов В. И. *Устойчивость движения.* — М.: Высшая школа, 1973.

[45] Измайлова О. В., Козлов В. В. *Аналитические свойства решений уравнений Эйлера – Пуанкаре на разрешимых алгебрах Ли.* — Вестник Моск. университета, Сер. I, Математика. Механика. — 1996. — № 3. — С. 60–65.

[46] Ильяшенко Ю. С. *Аналитическая неразрешимость проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений.* Математ. сборник. — 1976. — Т. 99. — № 2. — С. 162–175.

[47] Ильяшенко Ю. С. *Расходимость рядов, приводящих аналитическое дифференциальное уравнение к нормальной форме.* Функц. анализ и его прилож. — 1979. — Т. 13. — Вып. 3. — С. 87–88.

[48] Ильяшенко Ю. С., Пяртли А. С. *Материализация резонансов и расходимость нормализирующих рядов для полиномиальных дифференциальных уравнений.* Труды семинара им. Г. И. Петровского. — 1982. — Вып. 8. — С. 111–127.

[49] Каменков Г. В. *Избранные труды.* — М.: Наука, 1971. — Т. I; 1972. — Т. II.

[50] Кантрович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* — М.: Наука, 1984.

[51] Карапетян А. В. , Румянцев В. В. *Устойчивость консервативных и диссипативных уравнений*. Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1983. — Т. 6.

[52] Коддингтон Э., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1958.

[53] Козлов В. В. *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа – Дирихле*. — ПММ. — 1986. — Т. 50. — Вып. 6. — С. 928–937.

[54] Козлов В. В. *Асимптотические решения уравнений классической механики*. — ПММ. — 1982. — Т. 46. — Вып. 4. — С. 573–577.

[55] Козлов В. В. *Гипотеза существования асимптотических движений в классической механике*. Функц. анализ и его прилож. — 1982. — Т. 16. — Вып. 4. — С. 72–73.

[56] Козлов В. В. *Гироскопическая стабилизация вырожденных равновесий и топология вещественных алгбраических многообразий*. — ДАН. — 2008. — Т. 420. — № 4. — С. 447–450.

[57] Козлов В. В. *О равновесиях неголономных систем*. Вестн. МГУ, сер. I. Математика. Механика. — 1994. — № 3. — С. 74–79.

[58] Козлов В. В. *О равномерном распределении на торе*. — Вестник Моск. университета, Сер. I, Математика. Механика. — 2004. — № 2. — С. 22–29.

[59] Козлов В. В. *Об асимптотических движениях систем с диссипацией*. — ПММ. — 1994. — Т. 58. — Вып. 5. — С. 31–36.

[60] Козлов В. В. *Об инвариантных мерах уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли*. Функц. анализ и его прилож. — 1988. — Т. 22. — Вып. 1. — С. 69–70.

[61] Козлов В. В. *Об одной задаче Кельвина*. — ПММ. — 1989. — Т. 53. — Вып. 1. — С. 165–167.

[62] Козлов В. В. *Об устойчивости равновесия неголономных систем*. — ДАН СССР, 1986. — Т. 288. — № 2 — С. 289–291.

[63] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. — Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995.

[64] Козлов В. В. *Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской – Ляпунова*. Матем. заметки. — 1994. — Т. 52. — Вып. 2. — С. 46–52.

[65] Козлов В. В., Паламодов В. П. *Об асимптотических решениях уравнений классической механики*. — ДАН СССР. — 1982. — Т. 263. — № 2. — С. 285–289.

[66] Козлов В. В., Трещев Д. В. *О неустойчивости изолированных равновесий динамических систем с инвариантной мерой в нечетномерном пространстве*. — Матем. заметки. — 1999. — Т. 65. — Вып. 5. — С. 674–680.

[67] Козлов В. В., Трещев Д. В. *Числа Ковалевской обобщенных цепочек Тоды*. — Матем. заметки. — 1989. — Т. 46. — № 5. — С. 17–28.

[68] Козлов В. В., Фурта С. Д. *О решениях систем дифференциальных уравнений с обобщенно степенной асимптотикой*. — Матем. заметки. — 1995. — Т. 58 — Вып. 12. — С. 851–861.

[69] Козлов В. В., Фурта С. Д. *Первый метод Ляпунова для сильно нелинейных систем*. — ПММ. — 1996. — Т. 60. — Вып. 1. — С. 10–22.

[70] Красильников П. С. *О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости при резонансе* 1:3. — В сб. «Исследование задач устойчивости и колебаний и их приложения в динамике летательных аппаратов». — М.: Изд. «МАИ», 1980. — С. 31–37.

[71] Красильников П. С. *О расширениях пространства решений уравнения Гамильтона–Якоби и их приложениях в задачах устойчивости*. — Препринт № 550 Ин-та проблем механики РАН. — М.: 1995.

[72] Красильников П. С. *Об алгебраических критериях асимптотической устойчивости при резонансе* 1:1. — ПММ. — 1993. — Т. 57. — Вып. 4. — С. 5–11.

[73] Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. — М.: Физматгиз, 1959.

[74] Красовский Н. Н. *Об устойчивости по первому приближению*. — ПММ. — 1995. — Т. 19. — Вып. 3. — С. 516–530.

[75] Кузнецов А. Н. *Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений*. — Фукц. анализ и его прилож. — 1972. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 41–51.

[76] Кузнецов А. Н. *О существование входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением*. — Функц. анализ и его прилож. — 1989. — Т. 23. — Вып. 4. — С. 63–74.

[77] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1987.

[78] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*. Т. II. «Теория поля». — М.: Наука 1988.

[79] Лунев В. В. *Мероморфные решения уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой*. — ПММ. — 1994. — Т. 58. — Вып. 1. — С. 10–39.

[80] Ляпунов А. М. *Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку*. — В кн.: Собр. соч. — М.-Л.: Изд. «АН СССР», 1954. — Т. I. — С. 407–417.

[81] Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. — Харьков: Издание харьковского математического общества, 1982.

[82] Маркеев А. П. *Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса*. — ПММ. — 1968. — Т. 32. — Вып. 4. — С. 738–744.

[83] Маркеев А. П. *Резонансы и асимптотические траектории в системах Гамильтона.* — ПММ. — 1990. — Т. 54. — Вып. 2. — С. 207–212.

[84] Маркеев А. П., Щербина Г. А. *О Движениях, асимптотических к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел.* — ПММ. — 1987. — Т. 51. — Вып. 3. — С. 335–362.

[85] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* — М.: Мир, 1980.

[86] Матвеев М. В. *Устойчивость по Ляпунову положений равновесий обратимых систем.* — Матем. заметки. — 1995. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 90–104.

[87] Милнор Дж., Уоллес А. *Дифференциальная топология. Начальный курс.* — М.: Мир, 1972.

[88] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах.* — М.: Мир, 1973.

[89] Молчанов А. М. *Разделение движений и асимптотические методы теории нелинейных колебаний.* — ДАН СССР. — 1961. — Т. 136. — № 5. — С. 1030–1033.

[90] Нарасимхан Р. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* — М.: Мир, 1973.

[91] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем.* — М.: Наука, 1967.

[92] Некрасов П. А. *Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* — Математ. сборник. — 1896. — Т. 18. — Вып. 1. — С. 161–274.

[93] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* — М.: Наука, 1978.

[94] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* — М.: Мир, 1989.

[95] Осипов Ю. С. *О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени.* — ПММ. — 1965. — Т. 29. — Вып. 5. — С. 810–820.

[96] Румянцев В. В. *Об устойчивости движения неголономных систем.* — ПММ. — 1967. — Т. 31. — Вып. 2. — С. 260–271.

[97] Румянцев В. В., Сосницкий С. П. *О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем.* — ПММ. — 1993. — Т. 57. — Вып. 6. — С. 144–166.

[98] Руш В., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* — М.: Мир, 1980.

[99] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. *Устойчивость биологических сообществ.* — М.: Наука, 1978.

[100] Сергеев В. С. *Об оценке области притяжения для одного класса интегро-дифференциальных уравнений.* — В сб. «Устойчивость движения». — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1985. — С. 88–93.

[101] Сергеев В. С. *Об устойчивости решений итегро-дифференциальных уравнений в некоторых случаях*. — В сб. «Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем». — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1987. — С. 98–105.

[102] Сокольский А. Г. *Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае нулевой частоты*. — ПММ. — 1981. — Т. 45. — Вып. 3. — С. 441–446.

[103] Сокольский А. Г. *Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот*. — ППМ. — 1974. — Т. 38. — Вып. 5. — С. 791–799.

[104] Сокольский А. Г. *Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка*. — ПММ. — 1997. — Т. 41. — Вып. 1. — С. 24–33.

[105] Сокольский А. Г. *Об устойчивости гамильтоновых систем в случае нулевой частоты*. — Дифференц. уравн. — 1981. — Т. 17. — № 8. — С. 1509–1510.

[106] Тамм И. Е. *Основы теории электричества*. — М.: Наука, 1966.

[107] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых уравнений*. — М.: Факториал, 1995.

[108] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. — М.: Наука, 1967.

[109] Уиттекер Э. Т. *Аналитическая динамика*. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[110] Фурта С. Д. *Асимптотические решения полуквазиоднородных систем дифференциальных уравнений*. — В сб. «Математические методы в механике». — М.: Изд. МГУ, 1990. — С. 93–96.

[111] Фурта С. Д. *Асимптотические траектории механических систем и проблема обращения теоремы Рауса об устойчивости равновесия*. — Дифференциальные и интегральные уравнения: методы топологической динамики. Межвуз. сб. науч. трудов. — Горький: Изд. ГГУ, 1989. — С. 80–86.

[112] Фурта С. Д. *Асимптотические траектории натуральных систем, находящихся под действием сил вязкого трения*. — В сб. «Аналитические и численные методы исследования механических систем». — М.: Изд. «МАИ», 1989. — С. 35–38.

[113] Фурта С. Д. *О неустойчивости положений равновесия ненатуральных консервативных систем*. — В сб. «Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем». — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1987. — С. 203–206.

[114] Фурта С. Д. *О неустойчивости положений равновесия несвободных механических систем*. — Прикл. мех. — 1991. — Т. 27. — № 2. — С. 43–56.

[115] Фурта С. Д. *О неустойчивости равновесия одной гироскопической системы с двумя степенями свободы*. — Вестн. МГУ, сер. I. Математика. Механика. — 1987. — № 5. — С. 100–101.

[116] Фурта С. Д. *Об асимптотических движениях нессиметричного твердого тела на круговой орбите при наличие резонанса третьего порядка.* — Космич. исследования. — 1988. — Т. 26. — Вып. 6. — С. 943–944.

[117] Фурта С. Д. *Об асимптотических решениях автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае нескольких нулевых собственных значений.* — Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Межвуз. сб. трудов. — Пермь: Изд. ПГУ, 1989. — С. 152–156.

[118] Фурта С. Д. *Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений.* — Дифференц. уравн. — 1990. — Т. 26. — № 8. — С. 1348–1351.

[119] Фурта С. Д. *Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в некоторых критических случаях.* — Математ. сборник. — 1993. — Т. 184. — № 2. — С. 43–56.

[120] Фурта С. Д. *Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем.* — ПММ. — 1986. — Т. 50. — Вып. 6. — С. 938–943.

[121] Фурта С. Д. *Об асимптотических траекториях динамических систем.* — Динамика, стохастичность, бифуркации. Межвуз. сб. науч. трудов. — Горький: Изд. ГГУ, 1990. — С. 89–101.

[122] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. *Исследования асимптотической устойчивости равновесия при резонансе* 1:3. — Препринт № 67 Ин-та прикл. матем. — АН СССР, 1978.

[123] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. *Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости.* — ДАН СССР. — 1978. — Т. 240. — № 6. — С. 1309–1311.

[124] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. *Условия устойчивости равновесия при резонансе* 1:3. — ПММ. — 1980. — Т. 44. — Вып. 2. — С. 229–237.

[125] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. *Устойчивость критических положений равновесия.* — Пущино: ОНТИ НАЦБИ АН СССР, 1985.

[126] Халмош П. *Конечномерные векторные пространства.* — М.: Физматгиз, 1963.

[127] Харди Г. *Расходящиеся ряды.* — М.: ИЛ, 1951.

[128] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Мир, 1970.

[129] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1984.

[130] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* — М.: Мир, 1989.

[131] Чеботарев Н. Г. *«Многоугольник Ньютона» и его роль в современном развитии математики.* — В кн.: Исаак Ньютон. — М.-Л.: Изд. АН СССР, 1943.

[132] Четаев Н. Г. *Устойчивость движения. Работы по по аналитической механике*. — М.: Изд. АН СССР, 1962.

[133] Шестаков А. А. *Об асимптотическом поведении решений многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих особую точку высшего порядка*. — ДАН СССР. — 1960. — Т. 131. — № 5. — С. 1038–1041.

[134] Шиманов С. Н. *Критический случай пары чисто мнимых корней для системы с последействием*. — Сиб. мат. журн. — 1961. — Т. 2. — № 3. — С. 467–480.

[135] Шиманов С. Н. *Критический случай пары чисто мнимых корней для системы с последействием* (*особый случай*). — Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4. — № 2. — С. 457–470.

[136] Шиманов С. Н. *Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием*. — ПММ. — 1960. — Т. 24. — Вып. 3. — С. 447–457.

[137] Шиманов С. Н. *Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием* (*особый случай*). — Изв. вузов, матем. — 1961. — № 1 (20). — С. 152–162.

[138] Шноль Э. Э. *О неустойчивости положений равновесия в автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений*. — Пущино: Препринт НЦБИ АН СССР, 1983.

[139] Шноль Э. Э., Хазин Л. Г. *Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе* 1:3. — Препринт № 45 Ин-та прикл. матем АН СССР, 1977.

[140] Штеренлихт Л. М. *Канонические преобразования Ляпунова в нормальные формы гамиильтонианов*. — ПММ. — 1975. — Т. 39. — Вып. 4. — С. 604–613.

[141] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. — М.: Наука, 1971.

[142] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции*. — М.: Наука, 1977.

[143] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution equations and o.d.e.'s of P-type* J. Math. Phys., 1980, vol. 21, p. 715–721.

[144] Arnold V. I. *Sur la geometrie differentelle des groupes de Lie de dimension infinite et ses a e'hidradinamiques des fluides pur faits*. Ann. Inst. Fourier, 1966, vol. 16, № 1, p. 319–366.

[145] Bender C. M., Orszag S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, McGraw-Hill, 1978.

[146] Birkhoff G. *The restricted problem of three bodis*. Rend Circ. Mat. Palermo, 1915, vol. 39, p. 1–115.

[147] Bohl P. *Über die Bewegung eines mechanisches Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage*. J. reine und angew. Math., 1904, Band 127, 3/4, p. 179–276.

[148] Bolotin S., Negrini P. *Asymptotic solutions of Lagrangian systems with gyroscopics forces*. Nonlinear Diff. Eq. and Appl., 1995, vol. 2, p. 417–444.

[149] Bountis T., Drossos L., Lakshmanan M., Parthasarathy S. *On the non-integrability of a family of Duffing – van der Pol oscillators*. Journal of Physics A: Math. Gen., 1993, vol. 26, № 36, p. 6927–6942.

[150] Bountis T., Segur H., Vivaldi F. *Integrable Hamiltonian systems and Painleve property*. Phys. Rev. A, 1982, vol. 25, p. 1257–1264.

[151] Briot C., Bouquet T. *Recherches sur les proprietes des equations differentielles*. J. Ecole polytechn., Paris, 1856, vol. 21, № 36, p. 133–199.

[152] Chang Y. F., Greene J. M., Tabor M., Weiss J. *The analytic structure of the dynamical systems and self-similar natural boundaries*. Physica 8D, 1983, p. 183–207.

[153] Chang Y. F., Tabor M., Weiss J. *Analytic structure of the Henon – Heiles Hamiltonian in integrable and nonintegrable regimes*. J. Math. Phys., 1982, vol. 23, № 4, p. 531–538.

[154] Chow S. N., Hale J. *Methods on Bifurcation Theory*. vol. 251 of «Grundlehren der mathematischen Wissenschaften», New York – Heidelberg, Springer-Verlag, 1982.

[155] Cushman R. H. *A survey of normalization techniques applied to perturbed Keplerian systems*. Dynamics reported: new series, vol. 1: «Expositions in dynamical systems», eds. C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber and H. O. Walther, New York – Heidelberg, Springer-Verlag, 1992.

[156] Deprit A. *Canonical transformations depending on a small parameter*. Celestial Mechanics, 1969, vol. 1, p. 12–30.

[157] Engel U. M., Stegemerten B., Ecklet P. *Normal forms and quasi-integrals for the Hamiltonians of magnetic bottles*. Journal of Physics A: Math. Gen., 1995, vol. 28, p. 1425–1448.

[158] Ercolani N., Siggia E. D. *Painleve property and integrability*. Physics Letters A, 1986, vol. 119, № 3, p. 112–116.

[159] Field R. J., Noyes R. M. *Oscillations in chemical systems*. IV. *Limit cycle behavior in a model of real chemical reaction*. J. Chem. Phys., 1974, vol. 60, № 5, p. 1877–1884.

[160] Fomenko A. T., Trofimov V. V. *Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces*. London – New York, Gordon and Breach science publishers, 1988.

[161] Fournier J. D., Levine G., Tabor M. *Singularity clustering in the Duffing oscillator*. Journal of Physics A: Math. Gen., 1988, vol. 21, p. 33–54.

[162] Furta S. D. *On non-integrability of general systems of differential equations*. Z. angew Math. Phys. (ZAMP), 1996, vol. 47, p. 112–131.

[163] Gonzales-Gascon F. *A word of caution concerning the Yoshida criterion on algebraic integrability and Kowalevsky exponents*. Celestial Mechanics, 1988, vol. 44, p. 309–311.

[164] Hadamard J. *Sur l'iteration et les solutions asymptotiques des equations differtielles*. Bull. Soc Math. France, 1901, vol. 29, p. 224–228.

[165] Hartman P., Wintner A. *Asymptotic integrations of ordinary differential equations*. Amer. J. of Math., 1955, vol. 77, p. 692–724.

[166] Henon M., Heiles C. *The applicability of the third integral of the motion*: *some numerical results*. Astron. J., 1964, vol. 69, p. 73–79.

[167] Hess W. *Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des problems der Bewegungs eines starren Köpers um einen festen punkt*. Math. Annalen, 1890, Band 37, Heft 2, p. 153–181.

[168] Hill G. W. *researches in the Lunar theory*. In «Collected Mathematical Works of G. W. Hill», vol. 1, Washington, Cargenie Inst. of Wash., D.C., 1905.

[169] Hirsch M., Pugh C., Schub M. *Invariant Manifolds*. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, 1977.

[170] Hori G. I. *Theory of general perturbations with unspecified canonical variables*. J. Japan. Astron. Soc., 1966, vol. 18, №4, p. 287–296.

[171] Johnson R., Sell G. *Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasiperiodic linear differential systems*. J. of Diff. Eq., 1981, vol. 41, p. 262–288.

[172] Jorba A., Simo C. *On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients*. J. of Diff. Eq., 1992, vol. 98, p. 111–124.

[173] Karakostas G., Györi I. *Global stability in jod systems*. J. Math. Anal. Appl., 1988, vol. 1, p. 31, 85–96.

[174] Kneser A. *Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewishtslagen* I, II. J. reine und angew. Math., 1895, Band 115, 308–327, 1897, Band 118, 186–223.

[175] Kovalevskaya S. *Sur le probleme de la rotation d'un corps solide author d'un point fixe*. Acta Math., 1989, vol. 12, p. 177–232, 1980, vol. 14, p. 81–93.

[176] Laloy M. *On equilibrium instability for conservative and partially dissipative mechanical systems*. Internat. J. Non-Linear Mech., 1976, vol. 11, p. 295–301.

[177] Lyapunov A. M. *Sur l'instability del'equilibre dans ou la fonction de forces n'est pas un maximum*. Pures Appl., 1897, ser. V, vol. 1, 3-Frasc., p. 81–94.

[178] Palamodov V. P. *Stability of motion and algebraic geometry*. In V. V. Kozlov (ed.) «Dynamical Systems in Classical Mechanics», Amer. Math. Soc. Transl., 1995, Ser. 2, vol. 168, p. 5–20.

[179] Peiffer K., Carlier P. *A remark on the inversion of Lagrange – Dirichlet's theorem*. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 53. Qual. Theor. of Diff. Eq., Szeged, 1988, p. 473–484.

[180] Perron O. *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzgleichungen*. J. Reine Angew. Math., 1929, Band 161, p. 41–64.

[181] Poincaré H. *Sur les properties des fonctions defenies par les equations aux differences partielles*. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

[182] Poincaré H. *Sur une forme nouvelle des equations de la mecanique*. C. R. Acad. Sci. Paris, 1901, vol. 132, p. 369–371.

[183] Rössler O. E. *An equation for continuous chaos*. Phys. Letters A, 976, vol. 57, № 57, № 5, p. 397–398.

[184] Salvadori L. *Criteri d'instabilitá per i moti merostatici di un sistema olonomo*. Rend Accad. Sci. fis. e math. Soc. naz. sci. lett ed arti Napoli, 1960, vol. 27, № 4, p. 535–542.

[185] Salvadori L. *On the conditional total stability of equilibrium for mechanical systems*. Le Mathematiche, 1991, vol. XLVI, p. 415–427.

[186] Salvadori L. *Stability problems for holonomic mechanical systems*. La «Mechanique analitique» de Lagrange et son heritage — II, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1992, suppl. № 2 al vol. 126, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, p. 151–168.

[187] Salvadori L. *Sull' estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilita del Routh*. Recerche Mat., 1966, vol. 15, p. 162–167.

[188] Salvadori L., Visentin F. *Sulla stabilita condizionata nella meccanica dei sistemi olonomi*. Ren di Mat., 1992, vol. 12, p. 475–495.

[189] Siegel K. *Über die Existenz einer Normal-form analytische Hamiltonscher Differenttialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*. Ann. Math., 1954, Band 128, p. 144–170.

[190] Smale S. *On gradient dynamical systems*. Ann. Math., 1961, vol. 74, № 1, p. 199–206.

[191] Spring F., Waldvogel J. *Chaos in coorbital motion*. In Archie E. Roy (ed.) «Predictability, Stability and Chaos in N-Body Systems», New York, Plenum Press, 1991, p. 395–410.

[192] Tabor M., Weiss J. *Analytic structure of the Lorenz system*. Physical Review A, 1981, vol. 24, № 4, p. 2157–2167.

[193] Taliaferro S. D. *Instability of an equilibrium in a potential field*. Arch. for Rat. Mech. and Anal., 1990, vol. 109, № 2, p. 183–194.

[194] Treshchev D. V. *An estimate of irremovable nonconstant terms in the reducibility problem*. In V. V. Kozlov (ed.) «Dynamical system in classical Mechanics», Amer. Math. Soc. Transl., 1995, Ser. 2, vol. 168, p. 91–128.

[195] Tyson J. J. *On the appearance of chaos in a model of the Belousov – Zhabotinsky reaction*. J. Math. Biol., 1978, vol. 5, № 4, p. 351–362.

[196] Wiener Z. *Instability with two zero frequencies*. J. of Diff. Eq., 1993, vol. 103, p. 58–67.

[197] Williamson J. *On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems*. Amer. J. of Math., 1936, vol. 58, p. 141–163.

[198] Yoshida H. *A criterion of the non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom*. Physics letters A, 1989, vol. 141, p. 108–112.

[199] Yoshida H. *A criterion of the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential*. Physica 29D, 1987, p. 128–142.

[200] Yoshida H. *A note on Kowalewsky exponents and the nonexistence of an additional analytic integral*. Celestial Mechanics, 1988, vol. 44, p. 313–316.

[201] Yoshida H. *Necessary condition for the existence of algebraic first integrals* I, II. Celestial Mechanics, 1983, vol. 31, p. 363–379, 381–399.

[202] Zehnder E. *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems*. Comm. on the Pure and Appl. Math., 1975, vol. XXVIII, p. 91–140.

Козлов Валерий Васильевич
Фурта Станислав Дмитриевич

Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений

Дизайнер Л. Н. Загуменова
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий

Подписано в печать 11.06.2009. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,14. Уч. изд. л. 18,67.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №33.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

Переплет выполнен в ГУП УР «Ижевский полиграфический комбинат»
426039, г. Ижевск, Воткинское шоссе, 180.